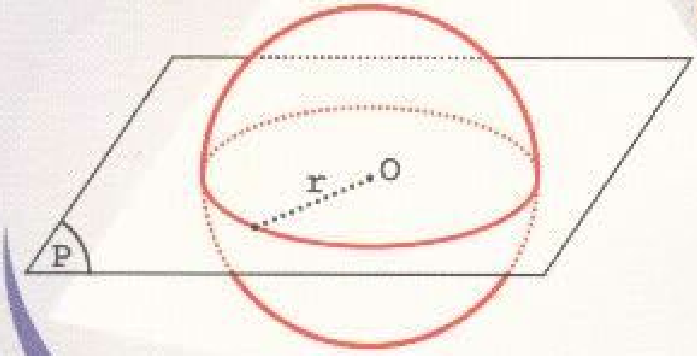
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC
12



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập
HÌNH HỌC 12

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách hoa hồng

Lời nói đầu

Quyển sách ***GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 12*** *này được biên soạn theo chương trình sách giáo khoa hiện hành, nhằm giúp các em có tài liệu tham khảo để ôn tập, củng cố kiến thức, đồng thời vận dụng để làm những bài tập có dạng tương tự hoặc nâng cao đạt kết quả tốt.*

Quý thầy cô và quý phụ huynh có thể xem quyển sách này như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy. Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

II KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có một điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

II. HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

Các phép dời hình trong không gian: Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, phép đối xứng qua mặt phẳng (P), phép đối xứng qua đường thẳng Δ, phép đối xứng tâm O.

2. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng một đa diện có các mặt là những tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.

Giải

Giả sử đa diện (H) có n mặt. Mỗi mặt của (H) có 3 cạnh nên n mặt có 3n cạnh. Vì mỗi cạnh của (H) là cạnh chung của đúng hai mặt nên số cạnh của (H) bằng $\frac{3n}{2}$ do đó n là số chẵn. *Ví dụ:* Tứ diện có 6 cạnh.

2. *Chứng minh rằng một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn. Cho ví dụ.*

Giải

Giả sử đa diện (H) có các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Gọi $m_1, m_2, \ldots, m_n$ lần lượt là số các mặt của (H) nhận chúng là đỉnh chung. Mỗi đỉnh A_K có m_K cạnh đi qua. Do mỗi cạnh của (H) là cạnh chung của đúng hai mặt nên số cạnh của (H) bằng $c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$. Vì c nguyên và $m_1, \ldots, m_n$ đều là số lẻ nên n chẵn.

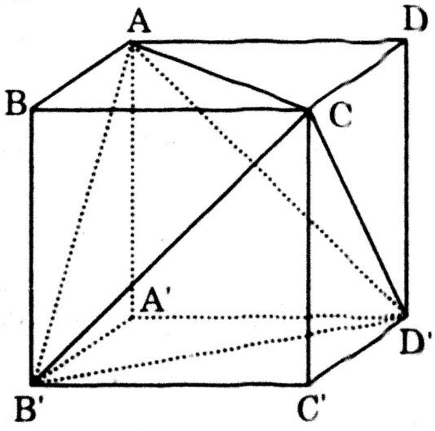
Ví dụ: Hình chóp ngũ giác có 6 đỉnh.

3. *Chia một khối lập phương thành 5 khối tứ diện.*

Giải

Năm khối tứ diện được chia là:

AB'CD', A'AB'D', BACB', C'B'CD', DACD'.

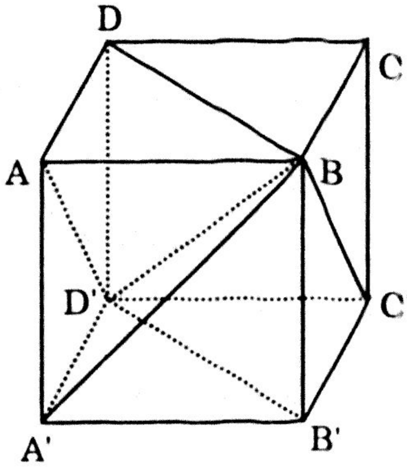


4. *Chia khối lập phương thành sáu khối tứ diện bằng nhau.*

Giải

Chia lăng trụ ABD.A'B'D' thành ba tứ diện DABD', A'ABD', A'B'BD'. Phép đối xứng qua (ABD') biến DABD' thành A'ABD', phép đối xứng qua (BA'D') biến A'ABD' thành A'B'BD' nên ba tứ diện DABD', A'ABD', A'B'BD' bằng nhau.

Làm tương tự đối với lăng trụ BCD.B'C'D' ta sẽ chia được hình lập phương thành sáu tứ diện bằng nhau (nhận xét rằng phép đối xứng qua (BDD') biến ABDD' thành CBDD').



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng hai tứ diện A'ABD và CC'D'B' bằng nhau.*

Hướng dẫn: Dùng phép đối xứng qua tâm hình hộp.

2. *Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các lăng trụ ABC.MNP và MNP.A'B'D' bằng nhau.*

Hướng dẫn: Dùng phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AM}$.

3. *Chia một khối tứ diện đều thành bốn khối tứ diện bằng nhau.*

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD thì các tứ diện GABC, GBCD, GCDA, GDAB bằng nhau.

§2. KHỐI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Khối đa diện lồi

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện xác định (H) được gọi là đa diện lồi.

2. Khối đa diện đều

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

a) Mỗi mặt là một đa giác đều có p cạnh

b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại {p; q}

Định lí: Chỉ có 5 loại khối đa diện đều. Đó là loại {3; 3}, loại {4; 3}, loại {3; 4}, loại {5; 3} và loại {3; 5}.

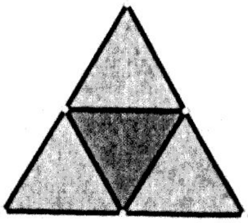
Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều:

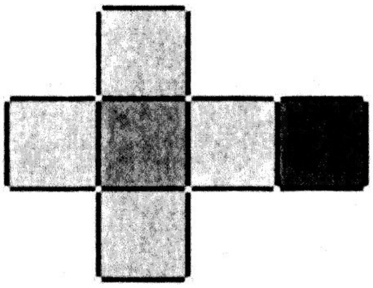
Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
{3; 3}	Tứ diện đều	4	6	4
{4; 3}	Lập phương	8	12	6
{3; 4}	Bát diện đều	6	12	8
{5; 3}	Mười hai mặt đều	20	30	12
{3; 5}	Hai mươi mặt đều	12	30	20

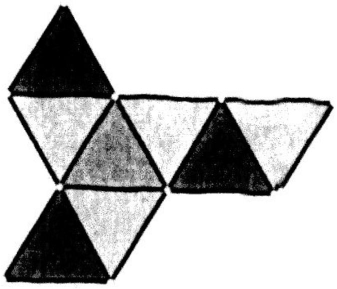
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cắt bìa theo mẫu dưới đây (hình vẽ), gấp theo đường kẻ, rồi dán các mép lại để được các hình tứ diện đều, hình lập phương và hình bát diện đều.

Hướng dẫn: Khi cắt theo hình đã cho cần chừa các mép để có thể dán lại với nhau.

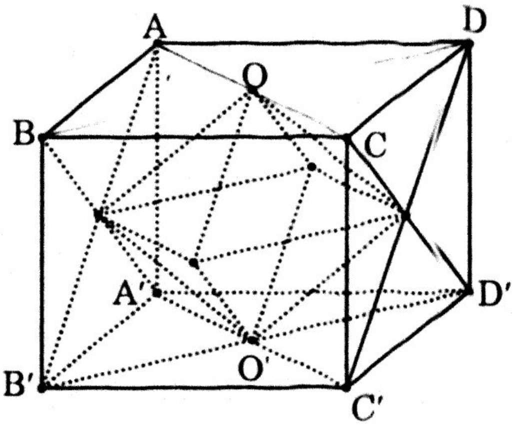






2. *Cho hình lập phương (H). Gọi (H') là hình bát diện đều có các đỉnh là tâm của các mặt của (H). Tính tỉ số diện tích toàn phần của (H) và (H').*

Giải



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương (H) thì độ dài cạnh hình bát diện đều (H') là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích toàn phần của (H) là $6a^2$.

Diện tích mỗi mặt của (H') là:

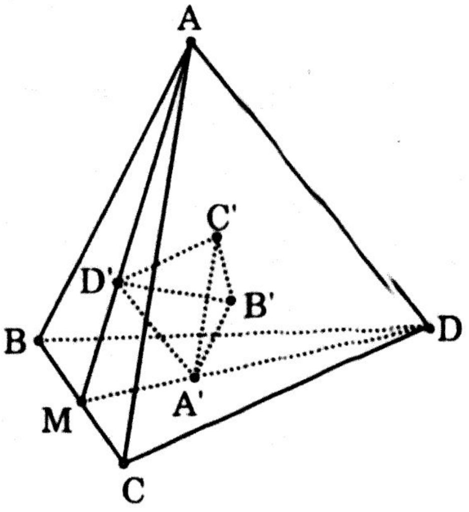
$$S = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Diện tích toàn phần của (H') là: $8.\frac{a^2\sqrt{3}}{8} = a^2\sqrt{3}$

Vậy tỉ số diện tích toàn phần của (H) và (H') là: $6a^2 : a^2\sqrt{3} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

3. *Chứng minh rằng tâm của các mặt của hình tứ diện đều là các đỉnh của một hình tứ diện đều.*

Giải



Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác đều BCD, ACD, ABD, ABC.

Gọi M là trung điểm BC:

Ta có $\frac{MD'}{MA} = \frac{MA'}{MD} = \frac{1}{3}$ suy ra A'D' // AD

và $A'D' = \frac{1}{3}AD = \frac{a}{3}$.

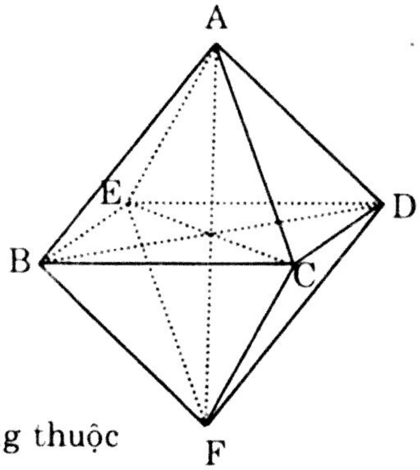
Tương tự $A'B' = B'C' = C'A' = B'D' = C'D' = \frac{a}{3}$.

Vậy A'B'C'D' là tứ diện đều.

4. Cho hình bát diện đều ABCDEF. Chứng minh rằng:

a) Các đoạn thẳng AF, BD và CE đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

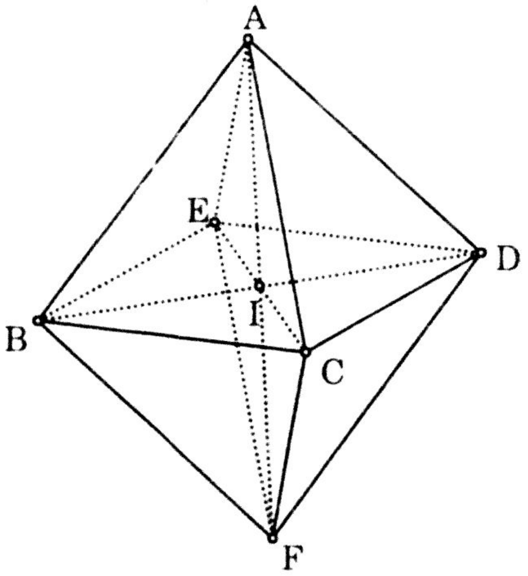
b) ABFD, AEFC và BCDE là những hình vuông.



Giải

a) Do B, C, D, E cách đều A và F nên chúng cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AF. Tương tự, A, B, F, D cùng thuộc một mặt phẳng và A, C, F, E cũng cùng thuộc một mặt phẳng.

BCDE là hình thoi nên hai đường chéo BD và EC vuông góc và cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. ABFD là hình thoi nên hai đường chéo BD và AF vuông góc và cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. AEFC là hình thoi nên AF ⊥ EC. Vậy AF, BD, CE đôi một vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



b) Do AI ⊥ (BCDE), AB = AC = AD = AE nên IB = IC = ID = IE. Từ đó suy ra BCDE là hình vuông. Tương tự ABFD, AEFC là những hình vuông.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Chứng minh rằng tâm các mặt của hình bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.

2. Cho khối bát diện đều ABCDEF cạnh a. gọi O là giao điểm của AC và BD, I và J lần lượt là trung điểm của AB và AE. Tính diện tích thiết diện tạo bởi khối bát diện với mp (OIJ)

Đáp số: $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$.

§3. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

- Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Bh$.
- Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích đáy và chiều cao của nó.
- Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.

Chú ý:

i) Tỉ số thể tích của hai khối đa diện đồng dạng bằng lập phương tỉ số đồng dạng.

ii) Trong một số bài toán ta thường sử dụng kết quả sau: Cho khối chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB,SC lần lượt lấy ba điểm A', B',, C' khác với S. Khi đó $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Tính thể tích của khối tứ diện đều cạnh a.

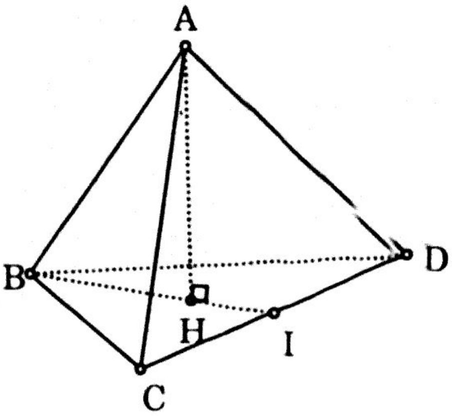
Giải

Cho tứ diện đều ABCD. Hạ đường cao AH của tứ diện, do các đường xiên AB, AC, AD bằng nhau nên các hình chiếu của chúng: HB, HC, HD bằng nhau.

Do BCD là tam giác đều nên H là trọng tâm của tam giác BCD.

BI là đường cao tam giác đều cạnh a nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BH = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



Trong tam giác vuông ABH ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

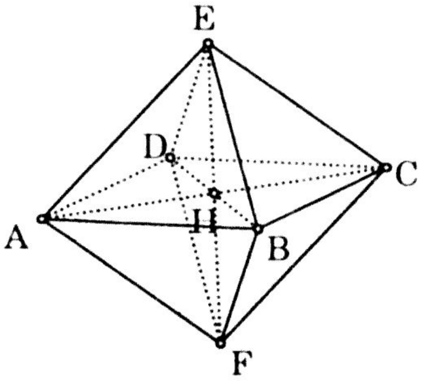
$$\Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Diện tích tam giác BCD: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích tứ diện là: $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{\frac{2}{3}} = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$

2. *Tính thể tích bát diện đều cạnh a.*

Giải



Cho khối bát diện đều ABCDEF cạnh a.
thể tích khối bát diện là: $V = 2V_{E.ABCD}$.
ABCD là hình vuông cạnh a, EH là đường cao hình chóp E.ABCD.

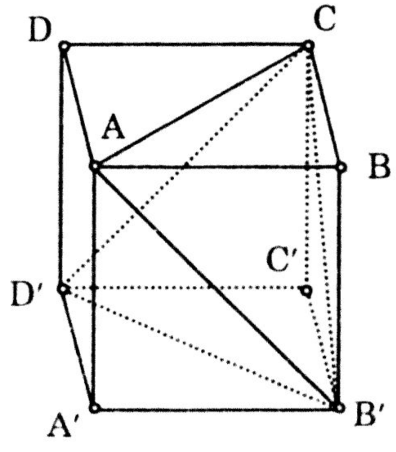
Ta có: $EH^2 = AE^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$

Do đó: $V = 2.\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

3. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tính tỉ số thể tích của khối hộp đó và thể tích của khối tứ diện ACB'D'.*

Giải

Gọi S là diện tích đáy ABCD và h là chiều cao của khối hộp. Chia khối hộp thành khối tứ diện ACB'D' và bốn khối chóp A.A'B'D', C.C'B'D', B'.BAC và D'.DAC.



Ta có diện tích tam giác A'B'D' là

$$S_{A'B'D'} = \frac{1}{2}S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}S$$

Thể tích khối chóp A.A'B'D' là

$$V_{A.A'B'D'} = \frac{1}{3}.h.\frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S.h.$$

Tương tự $V_{C.C'B'D'} = V_{B'.BAC} = V_{D'.DAC} = \frac{1}{6}S.h.$

Vậy thể tích khối tứ diện ACB'D' là:

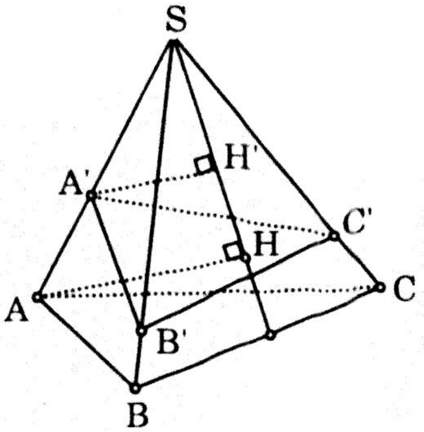
$$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{AA'B'D'} = S.h - \frac{4}{6}S.h = \frac{1}{3}Sh.$$

Vậy $\frac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{V_{ACB'D'}} = \frac{Sh}{\frac{1}{3}Sh} = 3.$

4. *Cho hình chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác với S.*

Chứng minh rằng $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

Giải



Gọi H và H' lần lượt là hình chiếu của A và A' trên mp(SBC). Khi đó S, H, H' thẳng hàng (vì chúng là hình chiếu của ba điểm thẳng hàng S, A, A' trên mp(SBC)).

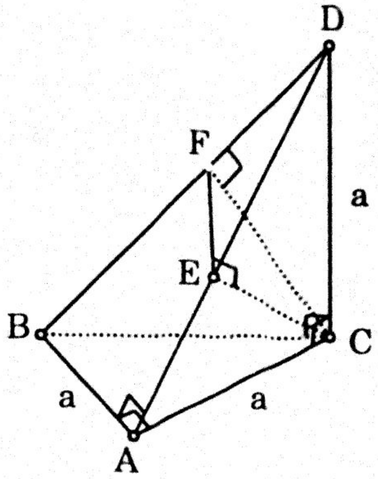
Vì A'H' // AH nên $\frac{A'H'}{AH} = \frac{SA'}{SA}$

Ta có: $$\frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin\widehat{B'SC'}}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{BSC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Suy ra: $$\frac{S_{SA'B'C'}}{S_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{SB'C'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{SBC}.AH} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

5. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A và AB = a. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy điểm D sao cho CD = a. Mặt vhẳng qua C và vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích của khối tứ diện CDEF theo a.*

Giải



Ta có: $\left.\begin{matrix} BA \perp CD \\ BA \perp CA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BA \perp (ADC) \Rightarrow BA \perp CE.$

Mặt khác BD ⊥ (CEF) ⇒ BD ⊥ CE.

Từ đó suy ra CE ⊥ (ABD) ⇒ CE ⊥ EF, CE ⊥ AD

Vì tam giác ACD vuông cân

$$CA = CD = a, \text{ nên } CE = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ta có $BC = a\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông BCD ta có $CF.BD = CB.CD\ (= 2S_{BCD})$

$$\Rightarrow CF = \frac{CB.CD}{BD} = \frac{a\sqrt{2}.a}{2\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$DF = \sqrt{DC^2 - CF^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

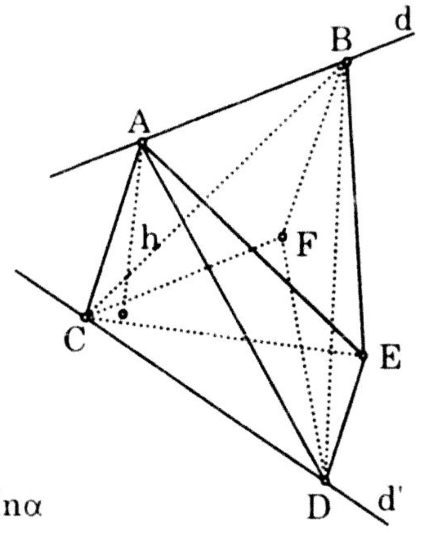
Diện tích tam giác CEF là $S_{CEF} = \frac{1}{2}EC.EF = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

Thể tích khối tứ diện DCEF là $V_{DCEF} = \frac{1}{3}DF.S_{CEF} = \frac{a^3}{36}$.

6. *Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Đoạn thẳng AB có độ dài a trượt trên d, đoạn thẳng CD có độ dài b trượt trên d'. Chứng minh rằng khối tứ diện ABCD có thể tích không đổi.*

Giải

Gọi h là độ dài đường vuông góc chung của d và d', α là góc giữa hai đường thẳng d và d'. Qua B, A, C dựng hình bình hành BACF. Qua A, C, D dựng hình bình hành ACDE. Khi đó ABE.CFD là một hình lăng trụ tam giác. Ta có:



$$V_{BADC} = V_{BADE} = V_{D.ABE} = \frac{1}{3}V_{ABE.CFD}$$

$$= \frac{1}{3}h.S_{ABE} = \frac{1}{3}h\frac{1}{2}ab.\sin\alpha = \frac{1}{6}h.ab.\sin\alpha$$

là một số không đổi.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp đó.*

Đáp số: $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

2. *Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác vuông ở B cạnh SA vuông góc với đáy. Kẻ AD ⊥ SB và AE ⊥ SC. Cho biết AB = SA = 1, BC = 2.*

a) Tính thể tích khối chóp S.ADE.

b) Tính khoảng cách từ E đến mp(SAB)

Đáp số: a) $V = \frac{1}{90}$; b) $d = \frac{1}{3}$

3. *Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = 2a, AA' = a. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho AM = 3MD.*

a) Tính thể tích khối chóp M.AB'C.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(AB'C)

Đáp số: a) $\frac{a^3}{4}$; b) $d = \frac{a}{2}$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

4. *Cho hình lăng trụ và hình chóp có diện tích đáy và chiều cao bằng nhau. Tính tỉ số thể tích của chúng.*

Giải

Giả sử hình lăng trụ và hình chóp lần lượt có thể tích là V_1 và V_2. Có diện tích đáy S và chiều cao h.

Ta có $V_1 = S.h;\ V_2 = \frac{1}{3}S.h.$

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = 3.$

5. *Cho hình chóp tam giác O.ABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Hãy tính độ dài đường cao OH của hình chóp.*

Giải

Kẻ $CE \perp AB$ và $OH \perp CE$

Ta có $\begin{cases} AB \perp CE \\ AB \perp OC \end{cases}$ (vì $OC \perp mp(OAB)$)

$\Rightarrow AB \perp (OEC) \Rightarrow AB \perp OH$

Vậy $\begin{cases} OH \perp CE \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp mp(ABC)$

OE là đường cao tam giác vuông OAB nên.

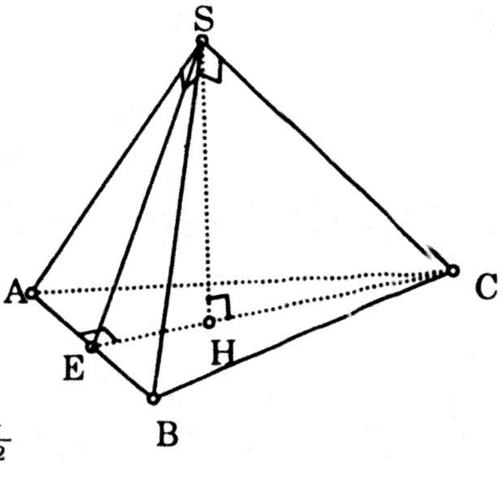
$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

OH là đường cao tam giác vuông OCE nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$



6. *Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh AB bằng a. Các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy một góc 60^0. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA.*

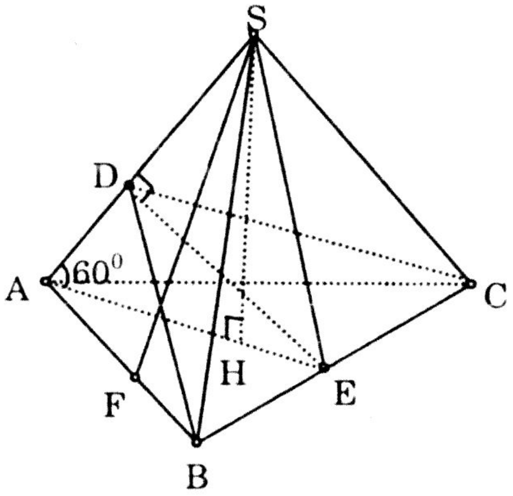
a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.DBC và S.ABC.

b) Tính thể tích của khối chóp S.DBC.

Giải

Gọi E là trung điểm BC. H là tâm tam giác đều ABC thì SH ⊥ mp(ABC)

Ta có $AH = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



$\widehat{SAH} = 60^0$ là góc giữa cạnh bên SA với mp(ABC). Trong tam giác vuông SAH ta có $SH = AH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$

$$DE = AE\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

$$SA = \frac{AH}{\cos 60^0} = 2AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$AD = AE.\cos 60^0 = \frac{AE}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

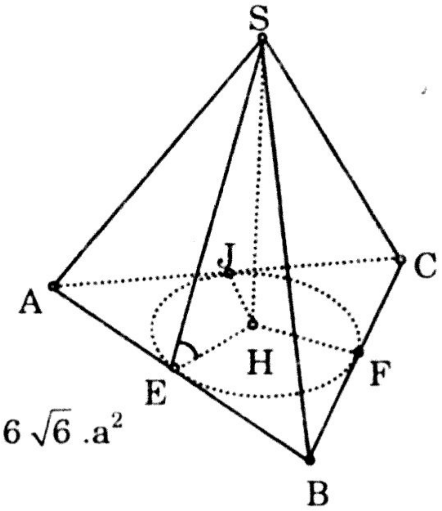
$$\Rightarrow SD = SA - AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$$

a) $\frac{V_{S.DBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SD}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{SD}{SA} = \frac{5a\sqrt{3}}{12} : \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{8}$

b) $V_{S.DBC} = \frac{1}{3}.SD.\frac{1}{2}.DE.BC = \frac{1}{6}.\frac{5a\sqrt{3}}{12}.\frac{3a}{4}.a = \frac{a^3 5\sqrt{3}}{96}$

7 *Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA cùng tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp đó.*

Giải



Kẻ SH ⊥ (ABC), HE ⊥ AB, HF ⊥ BC, HJ ⊥ AC. Vì các góc $\widehat{SEH}$, $\widehat{SFH}$ và $\widehat{SJH}$ đều bằng 60^0 nên HE = HF = HJ = r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Nửa chu vi tam giác ABC bằng p = 9a.

Theo công thức Hê-rông diện tích tam giác ABC bằng:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9.4.3.2}\,.a^2 = 6\sqrt{6}\,.a^2$$

Áp dụng công thức S = p.r, ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$

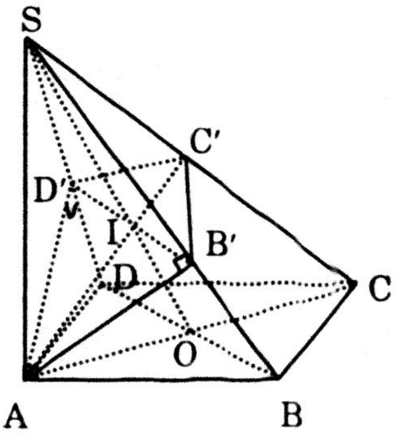
Xét tam giác vuông SEH ta có:

$$SH = EH\tan 60^0 = r\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\,a$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.2\sqrt{2}\,a.6\sqrt{6}\,a^2 = 8\sqrt{3}\,a^3$.

8. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy và AB = a, AD = b, SA = c. Lấy các điểm B', D' theo thứ tự thuộc SB, SD sao cho AB' vuông góc với SB, AD' vuông góc với SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'.*

Giải



Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD, I là giao điểm của SO và B'D' thì C' là giao điểm của đường thẳng AI với SC.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AB'$. Mà $AB' \perp SB$ nên $AB' \perp (SBC)$

$\Rightarrow AB' \perp SC$. Tương tự $AD' \perp SC$

Vậy $SC \perp (AB'D')$

Ta có: $SB = \sqrt{a^2+c^2}$, $SD = \sqrt{b^2+c^2}$, $SC = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Trong tam giác SAB, ta có $SA.AB = AB'.SB \Rightarrow AB' = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{ca}{\sqrt{a^2+c^2}}$

Tương tự $AD' = \frac{cb}{\sqrt{a^2+c^2}}$; $AC' = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Suy ra $SB' = \sqrt{SA^2 - AB'^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2a^2}{a^2+c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$

Tương tự $SD' = \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$; $SC' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Ta có $\Delta SC'B' \backsim \Delta SBC$ nên $\frac{B'C'}{BC} = \frac{SC'}{SB}$

$$\Rightarrow B'C' = \frac{BC.SC'}{SC} = \frac{bc^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a^2+c^2}}$$

Tương tự: $D'C' = \frac{ac^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{b^2+c^2}}$

Vì $AB' \perp B'C'$ và $AD' \perp D'C'$, nên ta có:

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}B'C'.AB' = \frac{1}{2}\frac{c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\frac{ca}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{1}{2}\frac{abc^3}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Tương tự: $S_{AD'C'} = \frac{1}{2}\frac{abc^3}{(b^2+c^2)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

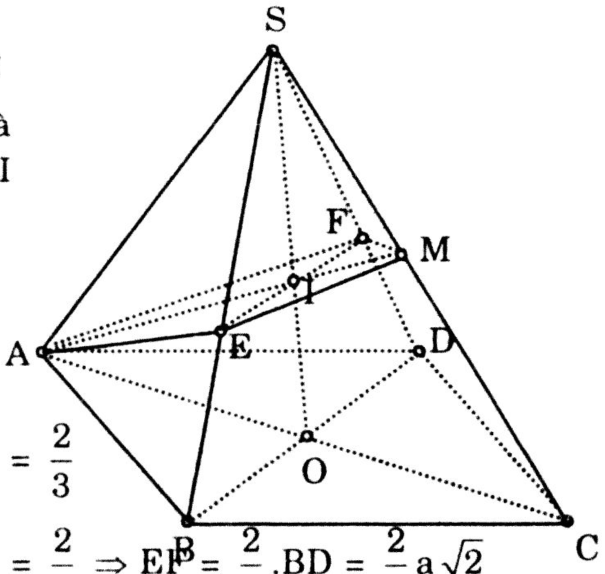
Từ đó suy ra thể tích khối chóp phải tìm bằng:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\frac{abc^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.\left(\frac{1}{a^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2}\right).\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{abc^5}{a^2+b^2+c^2}.\frac{a^2+b^2+2c^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} = \frac{abc^5(a^2+b^2+2c^2)}{6(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}$$

9. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M là trung điểm của SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích của khối chóp S.AEMF.*

Giải



Gọi O là tâm hình vuông ABCD, I là giao điểm của AM và SO thì EF qua I và song song với BD.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp AM$

I là trọng tâm tam giác SAC nên $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$

Trong ΔSBD EF // BD nên $\dfrac{EF}{BD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow EF = \dfrac{2}{3}.BD = \dfrac{2}{3}a\sqrt{2}$

Vì $\widehat{SAO} = \widehat{SCO} = 60^0$ nên ΔSAC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$ do đó:

$$AM = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc AEMF là

$$S_{AEMF} = \frac{1}{2}AM.EF = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

Ta có $\begin{cases} SC \perp EF \text{ (vì } EF \perp (SAC)) \\ SC \perp AM \text{ (vì } \Delta SAC \text{ đều)} \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AEMF)$

$$SM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $V_{S.AEMF} = \dfrac{1}{3}.SM.S_{AEMF} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

10 *Cho lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a.*

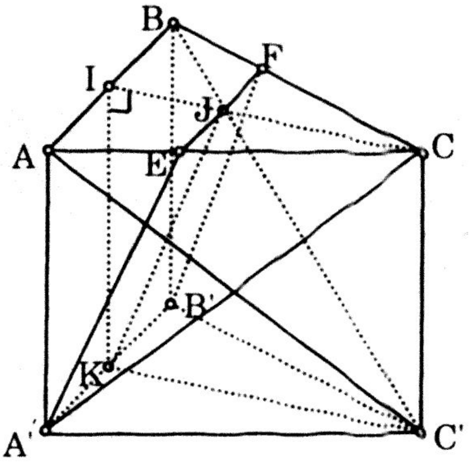
a) Tính thể tích của khối tứ diện A'BB'C.

b) Mặt phẳng (P) đi qua A'B' và trọng tâm tam giác ABC, cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Tính thể tích của hình chóp C.A'B'FE.

ĐAI HỌC QUỐC GIA HA NOI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC / 3016

Giải

a) Ta có: $V_{A'.BB'C} = V_{A'.B'C'C} = V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$



b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB và A'B', J là trọng tâm tam giác ABC. Đường thẳng qua J và song song với AB cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Đường thẳng EF chính là giao của (JA'B') với (ABC). Khi đó, vì EF ⊥ (CJK) nên (A'B'FE) ⊥ (CJK), suy ra khoảng cách từ C đến (A'B'FE) bằng khoảng cách từ C đến KJ.

Ta có $IJ = \frac{1}{3}CI = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow KJ = \sqrt{IK^2 + IJ^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = a\sqrt{\frac{13}{12}}.$$

$$S_{JKC} = \frac{2}{3}.S_{IKC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.a\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

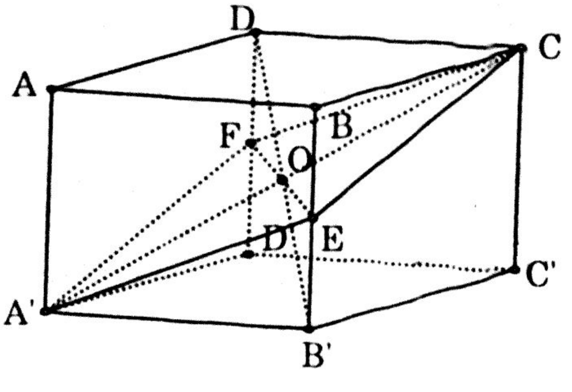
Khoảng cách từ C đến KJ là $h = d(C, KJ) = \frac{2S_{JKC}}{KJ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} : a\sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{2a\sqrt{13}}{13}$

Diện tích hình thang A'B'FE là: $S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{3}a\right).a\sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{5a^2}{12}.\sqrt{\frac{13}{3}}$

Thể tích hình chóp C.A'B'FE là: $V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.\frac{5a^2}{12}\sqrt{\frac{13}{3}}.\frac{2a\sqrt{13}}{13} = \frac{5a^3}{18\sqrt{3}}$

11. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BB', DD'. Mặt phẳng (CEF) chia khối hộp thành hai khối đa diện. Tính tỉ số thể tích của hai khối đa diện đó.*

Giải



Gọi O là tâm hình hộp. Khi đó O cũng là tâm của hình bình hành BB'DD'. Do đó O là trung điểm của EF. Do A' thuộc đường thẳng CO nên A' thuộc mặt phẳng (CEF). Ta có A'E // CF, A'F // CE. Vậy mặt phẳng (CEF) cắt hình hộp theo thiết diện là hình bình hành A'ECF.

Mặt phẳng (CEF) chia hình hộp ABCD.A'B'C'D' thành hai hình đa diện (H) và (H'). Gọi (H) là đa diện có các đỉnh là A, B, C, D, A', E, F, (H') là đa diện còn lại.

Phép đối xứng qua tâm O biến các đỉnh A, B, C, D, A', E, F của đa diện (H) theo thứ tự thành các đỉnh C', D', A', B', C, F, E của đa diện (H'). Từ đó suy ra phép đối xứng qua tâm O biến (H) thành (H'). Do đó hai hình đa diện (H) và (H') bằng nhau. Suy ra tỉ số thể tích của chúng bằng 1.

12. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M là trung điểm A'B', N là trung điểm BC.*

a) Tính thể tích khối tứ diện ADMN.

b) Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh A và (H') là khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$.

Giải

a) Ta có $V_{ADMN} = V_{M.AND} = \frac{1}{3}A'A.S_{AND} = \frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3}{6}$

b) Từ M kẻ ME // DN (E thuộc A'D')

Từ N kẻ NF // DE (F thuộc BB')

Thiết diện mp(DMN) với hình lập phương là ngũ giác DEMFN chia (H) thành các hình chóp F.DBN, D.ABFMA' và D.A'EM

Ta có $\Delta A'ME \backsim \Delta CDN$ nên $\frac{A'E}{A'M} = \frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A'E = \frac{1}{2}A'M = \frac{a}{4}$

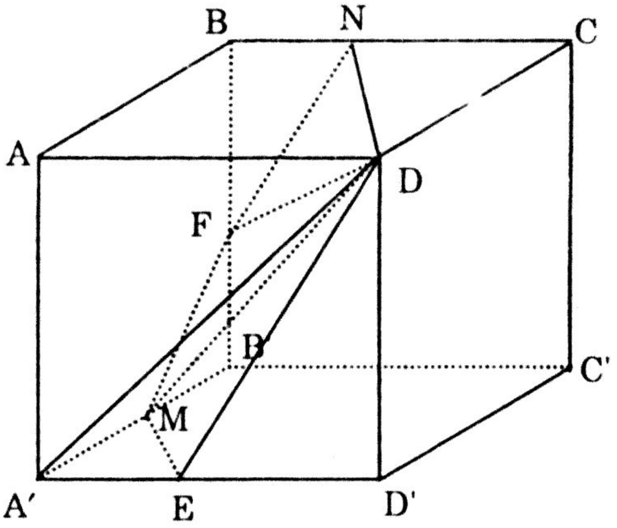
$\Delta FBN \backsim \Delta DD'E$ nên

$\frac{BF}{BN} = \frac{D'D}{D'E} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow BF = \frac{4}{3}.\frac{a}{2} = \frac{2a}{3}$

Diện tích ΔDBN:

$S_{DBN} = \frac{1}{2}.a.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$



Thể tích hình chóp F.DBN là

$V_{F.DBN} = \frac{1}{3}.BF.S_{DBN} = \frac{1}{3}.\frac{2a}{3}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{18}$

Ta có $S_{MFB'} = \frac{1}{2}MB'.B'F = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{3} = \frac{a^2}{12}$

$$\Rightarrow S_{ABFMA'} = S_{ABB'A'} - S_{MFB'} = a^2 - \frac{a^2}{12} = \frac{11a^2}{12}$$

$$\Rightarrow V_{D.ABFMA'} = \frac{1}{3}.S_{ABFMA'}.DA = \frac{1}{3}.\frac{11a^2}{12}.a = \frac{11a^3}{36}$$

Diện tích $\Delta A'EM$: $S_{A'EM} = \frac{1}{2}A'M.A'E = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{4} = \frac{a^2}{16}$

$$\Rightarrow \quad V_{D.A'ME} = \frac{1}{3}.S_{A'EM}.DD' = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{16}.a = \frac{a^3}{48}$$

Thể tích khối đa diện (H)

$$V_{(H)} = V_{F.DBN} + V_{D.ABFMA'} + V_{D.A'EM} = \frac{a^2}{18} + \frac{11a^3}{36} + \frac{a^3}{48} = \frac{55a^3}{144}$$

Thể tích khối đa diện (H')

$$V_{(H')} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{(H)} = a^3 - \frac{55a^3}{144} = \frac{89a^3}{144}$$

Vậy $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}} = \frac{55}{89}$.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau;

(B) Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau;

(C) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh;

(D) Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và mặt bằng nhau.

Trả lời: Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau. Chẳng hạn khối tứ diện. Chọn (B).

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số các đỉnh hoặc số các mặt của bất kì hình đa diện nào cũng:

(A) lớn hơn hay bằng 4; (B) lớn hơn 4;

(C) lớn hơn hay bằng 5; (D) lớn hơn 5.

Trả lời: Tứ diện có số đỉnh và số mặt bằng 4. Chọn (A).

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Số các cạnh của hình đa diện luôn luôn:

(A) Lớn hơn hay bằng 6; (B) Lớn hơn 6;

(C) Lớn hơn 7; (D) Lớn hơn hay bằng 8.

Trả lời: Số cạnh của tứ diện là 6. Chọn (A).

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI ?

(A) Hình tứ diện là khối đa diện lồi;

(B) Hình hộp là khối đa diện lồi;

(C) Hình chóp là khối đa diện lồi;

(D) Hình lăng trụ tam giác là khối đa diện lồi.

Trả lời: (A), (B), (D) đúng. Chọn (C).

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Hình khối chóp có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau;

(B) Hai khối hộp chữ nhật có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau;

(C) Hai khối lăng trụ có diện tích đáy và chiều cao tương ứng bằng nhau thì có thể tích bằng nhau;

(D) Hai khối lập phương có diện tích toàn phần bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

Trả lời: (A), (C), (D) đúng. Chọn (B).

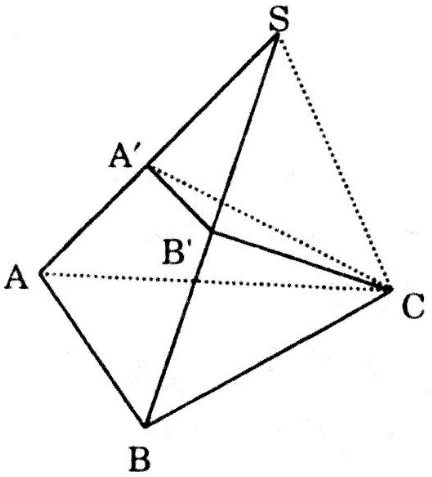
6. Cho hình chóp S.ABC. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Khi đó tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C và S.ABC là:

(A) $\frac{1}{2}$;

(B) $\frac{1}{3}$;

(C) $\frac{1}{4}$;

(D) $\frac{1}{8}$.



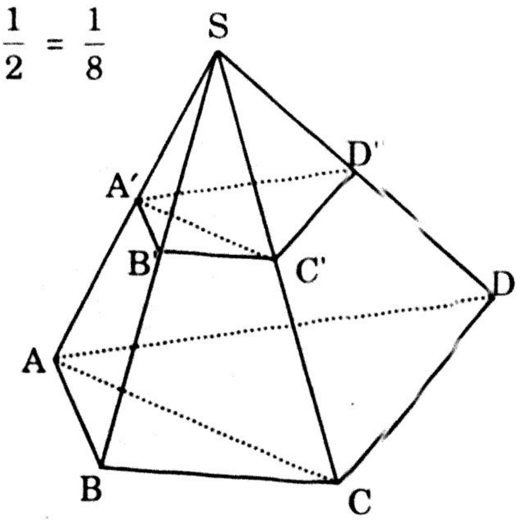
Trả lời: $\frac{V_{S.A'B'C}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Chọn (C).

7. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C'D' và S.ABCD là:

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{8}$; (D) $\frac{1}{16}$.

Trả lời: $\dfrac{V_{S.A'B'C}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$



$\Rightarrow \quad V_{S.A'B'C'} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABC} \quad (1)$

Tương tự: $V_{S.A'C'D'} = \dfrac{1}{8}V_{S.ACD} \quad (2)$

Lấy (1) cộng (2) ta được:

$V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'}$

$= \dfrac{1}{8}(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$

Vậy $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V} = \dfrac{1}{8}$. Chọn (C).

8. Thể tích khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là:

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$; (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$; (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$; (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

Trả lời: $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn (D).

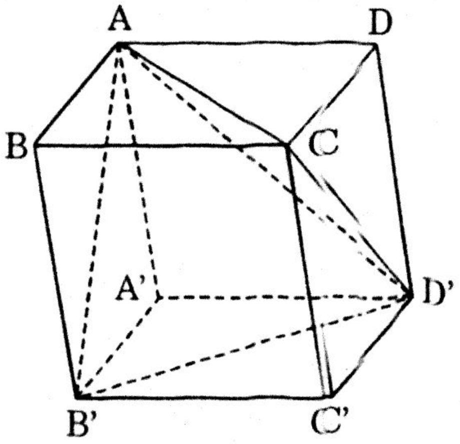
9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tỉ số thể tích của khối tứ diện ACB'D' và khối hộp ABCD.A'B'C'D' bằng:

(A) $\dfrac{1}{2}$;

(B) $\dfrac{1}{3}$;

(C) $\dfrac{1}{4}$;

(D) $\dfrac{1}{6}$.



Trả lời:

$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{C.B'C'D'} - V_{D'.ACD} - V_{B'.ABC} - V_{A.A'B'D'}$

$= V_{AABCD.A'B'C'D'} - \dfrac{4}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{1}{3}V$. Chọn (B).

10. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là giao của AC và BD. Tỉ số thể tích của khối chóp O.A'B'C'D' và khối hộp ABCD.A'B'C'D' bằng:

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{3}$; (C) $\dfrac{1}{4}$; (D) $\dfrac{1}{6}$.

Trả lời: $\dfrac{V_{O.A'B'C'D'}}{V_{ABCB.A'B'C'D'}} = \dfrac{\frac{1}{3}S.h}{S.h} = \dfrac{1}{3}$. Chọn (B).

Chương II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. KHÁI NIỆM MẶT TRÒN XOAY

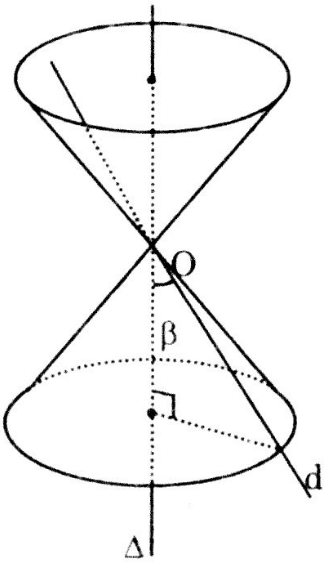
A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. MẶT NÓN TRÒN XOAY

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β không đổi với $0^0 < \beta < 90^0$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O (gọi tắt là mặt nón).

Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón đó.



2. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay

Cho tam giác OIM vuông tại I. Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là hình nón tròn xoay (hay hình nón). Hình tròn tâm I bán kính IM được gọi là mặt đáy, điểm O gọi là đỉnh, độ dài OI gọi là chiều cao và độ dài OM gọi là đường sinh của hình nón đó.

Khối nón tròn xoay (hay khối nón) là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó.

3. Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay

Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng r và độ dài đường sinh bằng l:

Ta có công thức: $S_{xq} = \pi r l$.

Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay

$$S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi r l + \pi r^2$$

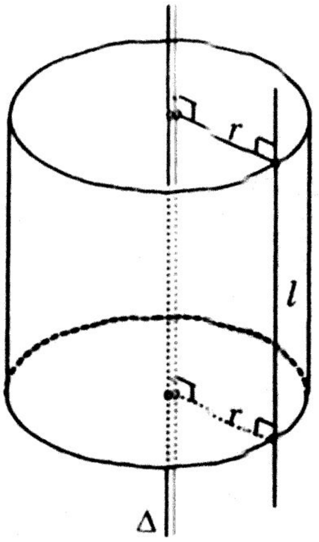
4. Thể tích khối nón tròn xoay

Khối nón tròn xoay có chiều cao h và có diện tích đáy là B thì thể tích là

$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

II. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Định nghĩa



Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và *l* song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng *l* sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay. Người ta thường gọi tắt mặt trụ tròn xoay là mặt trụ. Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng *l* gọi là đường sinh và r là bán kính của mặt trụ đó.

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Cho hình chữ nhật ABCD. Khi quay hình chữ nhật đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, ví dụ cạnh AB thì đường gấp khúc ADCB tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay (còn được gọi tắt là hình trụ)

Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ tạo ra ra hai hình tròn bằng nhau được gọi là hai đáy của hình trụ, còn cạnh CD gọi là độ dài đường sinh tạo ra mặt xung quanh của hình trụ. Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

Khối trụ tròn xoay là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó. Khối trụ tròn xoay còn gọi tắt là khối trụ. Ta gọi mặt đáy, chiều cao, đường sinh của khối trụ theo thứ tự là mặt đáy, chiều cao, đường sinh của hình trụ tương ứng làm giới hạn cho khối trụ đó.

3. Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay

Nếu gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình trụ có bán kính đáy là r và có đường sinh là *l* ta có công thức: $S_{xq} = 2\pi rl$.

Diện tích toàn phần của hình trụ tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình trụ đó cộng với diện tích hai đáy của hình trụ.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_đ = 2\pi rl + \pi r^2 = 2\pi r(l + r)$$

4. Thể tích khối trụ tròn xoay

Thể tích khối trụ tròn có chiều cao h và có diện tích đáy B thì

$$V = B.h = \pi r^2 h.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Cho đường tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P). Từ những điểm M thuộc đường tròn này ta kẻ các đường thẳng vuông góc với (P). Chứng minh rằng những đường thẳng như vậy nằm trên một mặt trụ*

tròn xoay. Hãy xác định trục của mặt trụ và bán kính của mặt trụ đó.

Giải

Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với (P) tại tâm O của đường tròn cho trước. Từ những điểm M trên đường tròn ta kẻ những đường thẳng m vuông góc với mặt phẳng (P). Như vậy các đường thẳng m luôn luôn song song với Δ và luôn luôn cách trục Δ một khoảng cách r. Do đó các đường thẳng m này thuộc mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng Δ và có bán kính bằng r.

2. *Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy gọi tên các hình tròn xoay hay khối tròn xoay sinh ra bởi:*

a) Ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư.

b) Ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của nó.

c) Một tam giác vuông kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó khi quay quanh một đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

d) Một hình chữ nhật kể cả các điểm trong của hình chữ nhật đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

Giải

a) Ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường chứa cạnh thứ tư sinh ra hình trụ.

b) Ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của nó sinh ra hình nón (đường cao xuất phát từ đỉnh tam giác).

c) Một tam giác vuông kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông sinh ra khối nón.

d) Một hình chữ nhật kể cả các điểm trong của hình chữ nhật đó khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh sinh ra khối trụ.

3. *Cho hình nón tròn xoay có đường cao h = 20 cm, bán kính đáy r = 25 cm.*

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho

b) Tính thể tích của khối nón được tạo thành bởi hình nón đó.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm. Tính diện tích thiết diện đó.

Giải

a) Giả sử SA = l là độ dài đường sinh, SH = h là chiều cao hình nón.

Trong tam giác vuông SOA ta có:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = h^2 + r^2 = 20^2 + 25^2 = 1025$$

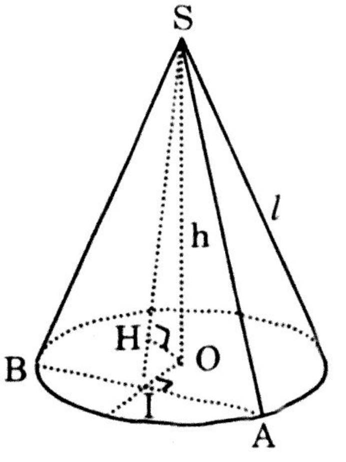
$$\Rightarrow SA = \sqrt{1025}$$

Diện tích xung quanh hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi.25\sqrt{1025} \approx 2514,5\ (cm^2)$$

b) Thể tích khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi.25^2.20 \approx 13083,3\ (cm^3)$$



c) Giả sử thiết diện SAB đi qua đỉnh S cắt đường tròn đáy tại A và B. Gọi I là trung điểm của dây cung AB. Từ tâm O của đáy vẽ OH vuông góc với SI.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

Từ đó $\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp SI \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB)$ nên $OH = 12$ cm.

Trong tam giác vuông SOI ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{256}{57600} = \frac{1}{225} \Rightarrow OI = 15 \text{ cm.}$$

Xét tam giác vuông OAI ta có $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$.

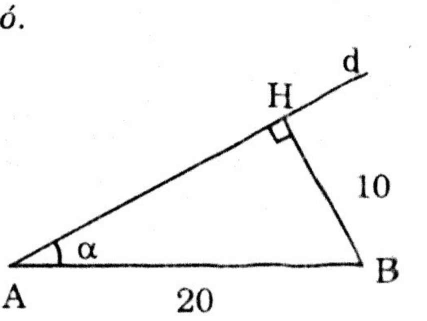
Vậy AI = 20 cm.

Ta có: $SI.OH = SO.OI \Rightarrow SI = \frac{SO.OI}{OH} = \frac{20.15}{12} = 25$ (cm)

Vậy diện tích thiết diện SAB là: $S_{SAB} = \frac{1}{2}SI.AB = 25.20 = 500\ (cm^2)$.

4. *Trong không gian cho hai điểm A, B cố định và có độ dài AB = 20 cm. Gọi d là một đường thẳng thay đổi luôn luôn đi qua A và cách B một khoảng bằng 10 cm. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn luôn nằm trên một mặt nón, hãy xác định trục và góc ở đỉnh của mặt nón đó.*

Giải



Kẻ $BH \perp d$ ta có BH = 10 cm.

Gọi $\alpha = \widehat{ABH}$

Ta có $\sin\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0$.

Vậy đường thẳng d luôn luôn thuộc mặt nón nhận đường thẳng AB làm trục và có góc ở đỉnh bằng $2\alpha = 60^0$.

5. *Một hình trụ có bán kính đáy r = 5 cm và có khoảng cách giữa hai đáy là 7 cm.*

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3 cm. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

Giải

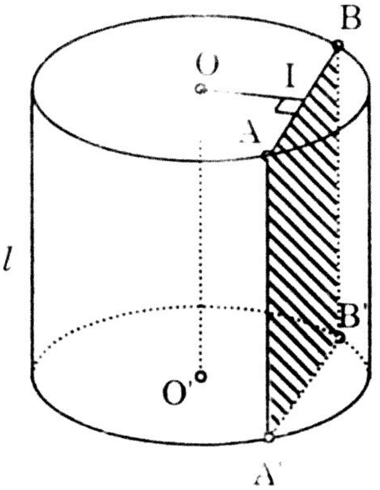
a. Đường sinh $l = 7$ cm.

Diện tích xung quanh hình trụ là.

$$S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi.5.7 \approx 219,91\ (cm^2)$$

Thể tích khối trụ có chiều cao h = 7 cm là

$$V = \pi r^2.h = \pi.5^2.7 \approx 549,77\ (cm^3).$$



b) Mặt phẳng (AA', BB') song song với trục OO' và cách trục 3 cm cắt khối trụ theo thiết diện là một hình chữ nhật ABB'A'. gọi I là trung điểm của dây cung AB, ta có: OI = 3;

$$AI^2 = OA^2 - OI^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

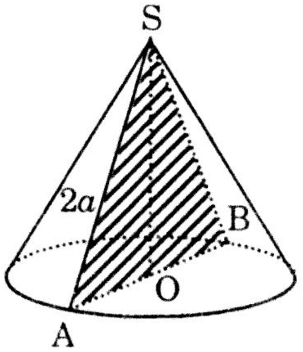
$$\Rightarrow AI = 4\ cm \Rightarrow AB = 2AI = 8\ (cm)$$

Vì thiết diện ABB'A' là hình chữ nhật nên có diện tích

$$S = AB \times AA' = 8 \times 7 = 56\ (cm^2)$$

6. *Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.*

Giải



Giả sử thiết diện là ΔSAB cạnh 2a. Khi đó bán kính đáy hình nón $r = a$, độ dài đường sinh $l = 2a$ và chiều cao $h = a\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh hình nón là:

$$S_{xq} = \pi.rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$$

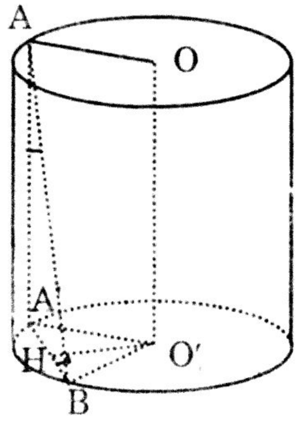
Thể tích hình nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

7. *Một hình trụ có bán kính r và chiều cao $h = r\sqrt{3}$.*

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích của khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho.

c) Cho hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.



Giải

a) Ta có $h = l = r\sqrt{3}$

Diện tích xung quanh hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi r.r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi r^2$$

Diện tích toàn phần hình trụ là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\sqrt{3}\,\pi r^2 + 2\pi r^2 = 2(\sqrt{3}+1)\pi r^2$$

b) Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi r^2.r\sqrt{3} = \sqrt{3}\,\pi r^3$

c) Ta có $OA = O'B = r$

Gọi AA' là đường sinh của hình trụ, ta có: $O'A' = r$ và $AA' = r\sqrt{3}$

Góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ chính là góc $\widehat{BAA'} = 30^0$

Vì OO' song song với mặt phẳng (ABA') nên khoảng cách giữa OO' và AB bằng khoảng cách giữa OO' và mặt phẳng (ABA').

Gọi H là trung điểm của đoạn BA' ta có O'H chính là khoảng cách cần tìm (vì $O'H \perp (AA'B)$). Tam giác BA'A vuông tại A' nên ta có:

$$BA' = AA'\tan 30^0 = r\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = r.$$

Vậy $\Delta BA'O'$ là tam giác đều cạnh r nên $O'H = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

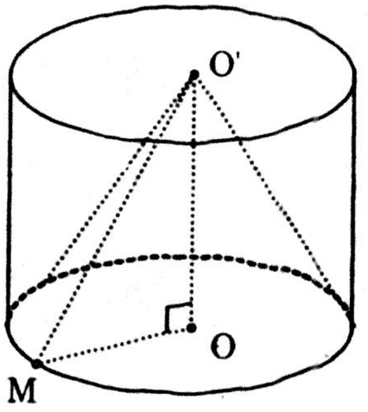
8. *Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O; r) và (O'; r). Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là (O; r).*

a) Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diện tích xung quanh của hình nón, hãy tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$?

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành 2 phần, hãy tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Giải

a) Ta có $l = h = r\sqrt{3}$



Diện tích xung quanh hình trụ là:

$$S_1 = 2\pi r.l = 2\pi r.r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,\pi r^2$$

O'M là một đường sinh của hình nón ta có:

$$l' = O'M = \sqrt{OO'^2 + OM^2} = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r$$

Diện tích xung quanh hình nón là:

$$S_2 = \pi r l' = \pi.r.2r = 2\pi r^2$$

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi r^2}{2\pi r^2} = \sqrt{3}$

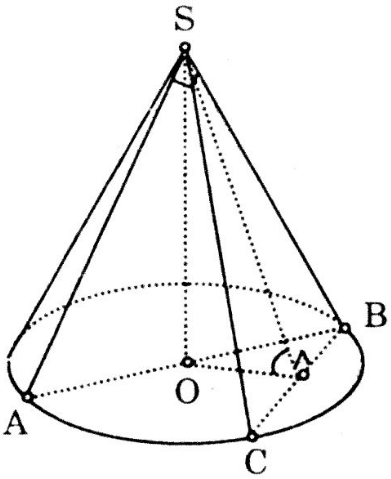
b) Khối trụ và khối nón có cùng đáy và cùng chiều cao nên thể tích khối trụ bằng ba lần thể tích khối nón. Gọi V_1 là thể tích khối nón và V_2 là thể tích phần còn lại của khối trụ, ta suy ra: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2}$.

9. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

Giải



a) Giả sử cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua trục SO của hình nón đó là tam giác vuông cân SAB (SA ⊥ SB và AB = $a\sqrt{2}$). Ta suy ra hình nón có bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, chiều cao $h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường sinh $l = a$.

Do đó: $S_{xq} = \pi r l = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$

Diện tích đáy của hình nón là $S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{2}$

Gọi V là thể tích khối nón ta có:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$$

b) Kẻ OH ⊥ BC thì SH ⊥ BC, theo giả thiết ta có $\widehat{SHO} = 60^0$.

$$\Rightarrow SH = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow BH = \sqrt{SB^2 = SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Diện tích ΔSBC là $S_{SBC} = \frac{1}{2}SH.BC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

10. *Cho hình trụ có bán kính r và có chiều cao cũng bằng r. Một hình vuông ABCD có hai cạnh AB, CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC, AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tính diện tích của hình vuông đó và tính côsin của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.*

Giải

Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu của 3C và D trên mặt phẳng đáy chứa dây cung AB thì ABC'D' là hình chữ nhật, do đó: AC' = 2r

Từ các tam giác vuông ABC' và CBC' ta có:

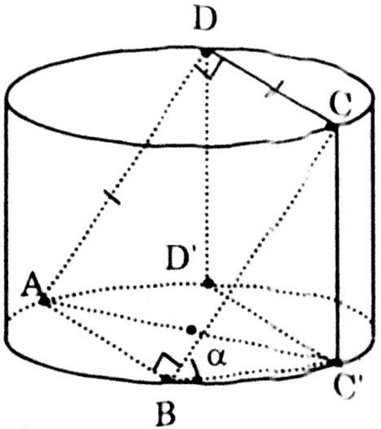
$$BC'^2 = AC^2 - AB^2 = 4r^2 - AB^2 \quad (1)$$

$$BC'^2 = BC^2 - CC'^2 = AB^2 - r^2 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có $4r^2 - AB^2 = AB^2 - r^2$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{5}{2}r^2$$

$$\Rightarrow AB = \frac{r\sqrt{10}}{2}$$



Vậy diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD} = \left(\frac{r\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{5r^2}{2}$

Ta có: $BC'^2 = \frac{5}{2}r^2 - r^2 = \frac{3r^2}{2} \Rightarrow BC' = r\sqrt{\frac{3}{2}} =$

$$S_{AB'C'D'} = AB.BC' = \frac{r\sqrt{10}}{2}.r\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{r^2\sqrt{15}}{2}$$

Gọi α là góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông ABCD và mặt phẳng đáy, ta có: $\cos\alpha = \frac{S_{ABC'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{BC'}{BC} = \frac{BC'}{AB} = \frac{r\sqrt{6}}{2} : \frac{r\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bên bằng a.*

a) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón.

b) Một mặt phẳng qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0.
Tìm diện tích thiết diện được tạo nên.

Đáp số: a) $S_{tp} = \frac{1}{2}\pi a^2(\sqrt{2} + 1)$, $V = \frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{2}$; b) $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

2. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SO = h, góc $\widehat{SAB} = \alpha$ ($\alpha > 45^0$). Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD của hình chóp.*

Đáp số: $S_{xq} = \frac{\pi\sqrt{2}h^2\cos\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}$

3. *Cho hình trụ có bán kính đáy r = 50 cm và chiều cao h = 50 cm.*

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích khối trụ được tạo nên.

b) Một đoạn thẳng có chiều dài 100 cm và có hai đầu mặt nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

Đáp số: a) $S_{xq} = \pi.5000$ (cm^2) $V = 125000\pi$ (cm^3)

b) 25 (cm).

§2. MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. MẶT CẦU

1. Mặt cầu

Tập hợp những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r (r > 0) được gọi là mặt cầu tâm O, bán kính r.

2. Điểm nằm trong và nằm ngoài mặt cầu. Khối cầu

Cho mặt cầu tâm O bán kính r và A là một điểm bất kì trong không gian.

- Nếu OA = r thì ta nói điểm A nằm trên mặt cầu S(O; r).
- Nếu OA < r thì ta nói điểm A nằm trong mặt cầu S(O; r).
- Nếu OA > r thì ta nói điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O; r).

Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu S(O; r) cùng với các điểm nằm bên trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O, bán kính r.

II. GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu S(O; r) và mặt phẳng (P). H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P). Khi đó OH = h là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu tới mặt phẳng (P). ta có các trường hợp:

1. $h > r$: Mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu
2. $h = r$: Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu tại điểm H. Ta có OH $\perp$ (P)
3. $h < r$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo đường tròn có bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$

   Đặc biệt khi h = 0 mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn lớn có bán kính r' = r.

III. GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG, TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu S(O; r) và đường thẳng Δ.

1. Trường hợp Δ đi qua tâm O của mặt cầu thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm A, B với AB = 2r.
2. Trường hợp Δ không đi qua tâm O của mặt cầu, ta gọi d là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng Δ, khi đó:
   - a) Nếu d < r: Đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm M, N;
   - b) Nếu d = r: Đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu tại một điểm H; (H gọi là tiếp điểm và đường thẳng Δ được gọi là tiếp tuyến của mặt cầu);
   - c) Nếu d > r: Đường thẳng Δ không cắt mặt cầu.

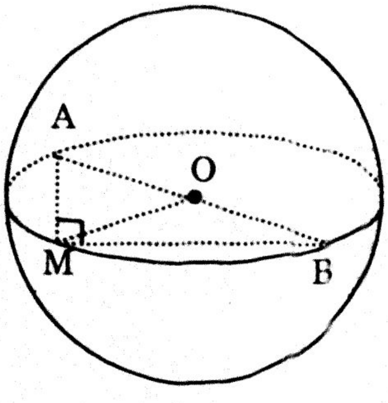
IV. DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

- Mặt cầu bán kính r có diện tích là $S = 4\pi r^2$.
- Khối cầu bán kính r có thể tích là $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Tìm tập hợp tất cả các điểm M trong không gian luôn luôn nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông.*

Giải



Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Vì $\widehat{AMB} = 90^0$ nên ta suy ra $OM = \frac{AB}{2}$ không đổi. Vậy tập hợp cần tìm là mặt cầu tâm O bán kính $r = \frac{AB}{2}$ hay mặt cầu nhận AB làm đường kính.

2. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Hãy xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.*

Giải

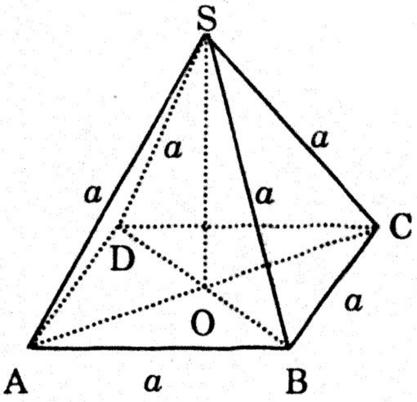
S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên đáy là hình vuông cạnh a và SO là đường cao hình chóp (O là tâm hình vuông ABCD)

Trong Δ vuông SOA ta có:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OS = \frac{a\sqrt{2}}{2} = r$$



Vậy mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, B, C, D có tâm O là tâm của hình vuông ABCD và có bán kính $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. *Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước.*

Giải

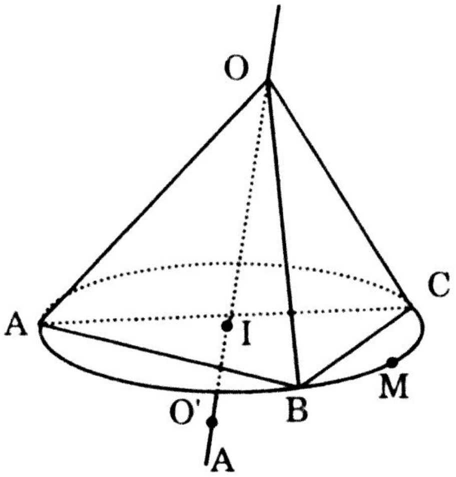
Phần thuận:

Gọi ($\mathscr{C}$) là đường tròn cố định cho trước. Trên ($\mathscr{C}$) ta lấy ba điểm A, B, C. Mặt cầu tâm O bán kính r qua ($\mathscr{C}$) khi và chỉ khi OA = OB = OC hay tâm O của mặt cầu nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trục này là đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn ($\mathscr{C}$) tại tâm I của đường tròn đó.

Phần đảo

Ngược lại, nếu ta lấy một điểm O' bất kì trên trục Δ thì với mọi điểm M bất kì trên đường tròn ($\mathscr{C}$) tâm I bán kính r' cho trước, ta đều có độ dài của đoạn thẳng $O'M = \sqrt{O'I^2 + IM^2} = \sqrt{O'I^2 + r^2}$ không đổi.

Như vậy đường tròn ($\mathscr{C}$) luôn luôn thuộc mặt cầu có tâm O' nằm trên trục Δ.



Kết luận

Tập hợp tâm các mặt cầu luôn luôn chứa một đường tròn cố định cho trước là một đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn nói trên tại tâm của đường tròn đó.

4. *Tìm tập hợp tâm mặt cầu luôn cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.*

Giải

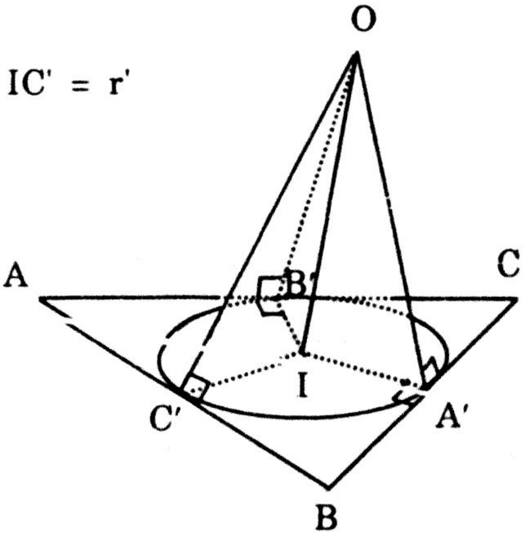
Giả sử mặt cầu S(O; r) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt tại A', B', C'. Gọi I là hình chiếu của tâm O trên mặt phẳng (ABC).

Vì BC ⊥ OA' nên BC ⊥ (OIA') suy ra BC ⊥ IA'.

Tương tự IB' ⊥ CA, IC' ⊥ AB.

Vì OA' = OB' = OC' = r nên IA' = IB' = IC' = r' không đổi (vì $r' = \sqrt{r^2 - OI^2}$)

Ta suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Vậy tâm O của mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác luôn luôn thuộc trục Δ của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Đường thẳng Δ này vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại tâm I của đường tròn nội tiếp nói trên.



Ngược lại, lấy điểm O thuộc trục Δ của đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì ta có IA' = IB' = IC'. Từ đó ta suy ra OA' = OB' = OC' = r không đổi. Vậy mặt cầu S(O; r) tiếp xúc với ba cạnh của tam giác.

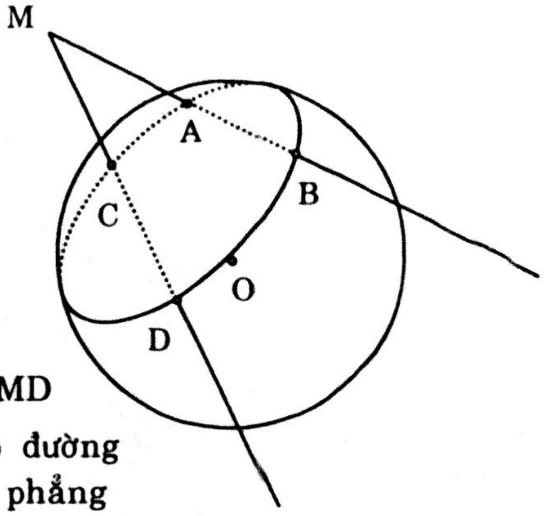
Vậy Tập hợp tâm những mặt cầu cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước là trục của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

5. *Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu S(O; r) ta kẻ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D.*

a) Chứng minh rằng MA.MB = MC.MD

b) Gọi OM = d. Tính MA.MB theo r và d.

Giải



a) Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M nên xác định mặt phẳng (AB, CD). Mặt phẳng (AB, CD) cắt mặt cầu S(O; r) theo giao tuyến là đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.

Trong mặt phẳng (AB, CD) ta có

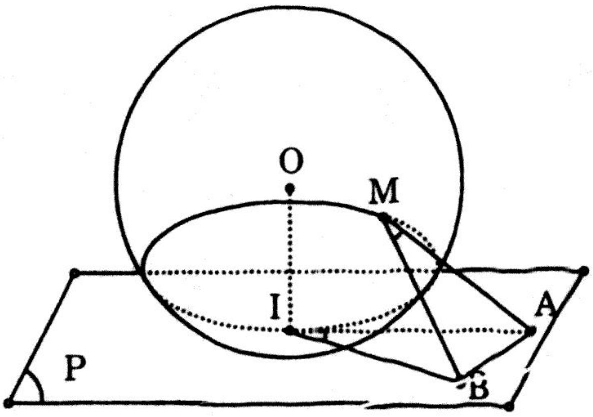
$\overline{MA}\ \overline{MB} = \overline{MC}\ \overline{MD} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$

b) Mặt phẳng (OAB) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn tâm O bán kính r. Trong mặt phẳng (AOB) này nếu gọi MO = d, ta có $MA.MB = d^2 - r^2$, trong đó r là bán kính mặt cầu.

6. *Cho mặt cầu S(O; r) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không đối xứng với I qua O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu cắt (P) tại A và B.*

Chứng minh $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

Giải



Mặt phẳng (MAI) cắt mặt cầu cho trước theo một đường nhận AM và AI làm hai tiếp tuyến. Ta có: AM = AI.

Tương tự ta có: BM = BI.

Ta suy ra ΔAMB = ΔAIB (c.c.c).

Do đó ta có $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

7. *Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AA' = a, AB = b và AD = c.*

a) Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp đó

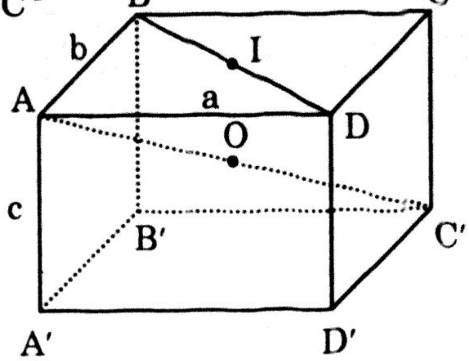
b) Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (ABCD) với mặt cầu trên.

Giải

a) Gọi O là trung điểm của AC' thì O là điểm cách đều 8 điểm hình hộp.

Ta có $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{AD^2 + DC^2 + CC'^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



Bán kính mặt cầu qua 8 đỉnh là:

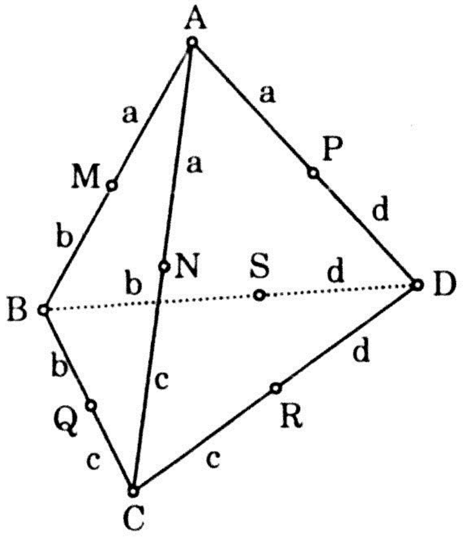
$$OA = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

b) Giao tuyến của (ABCD) với mặt cầu trên là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD. Vậy đường tròn giao tuyến của (ABCD) với mặt cầu trên có tâm là trung điểm I của BD và có bán kính là:

$$r' = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

8. *Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì tổng độ dài của các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau.*

Giải



Giả sử tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD, CB, CD, BD lần lượt tiếp xúc với mặt cầu tại M. N, P, Q, R, S.

Khi đó ta có: AM = AN = AP = a

và BM = BQ = BS = b.

CQ = CN = CR = c

và DP = DR = DS = d.

Như vậy: AB + CD = a + b + c + d;

AC + BD = a + c + b + d;

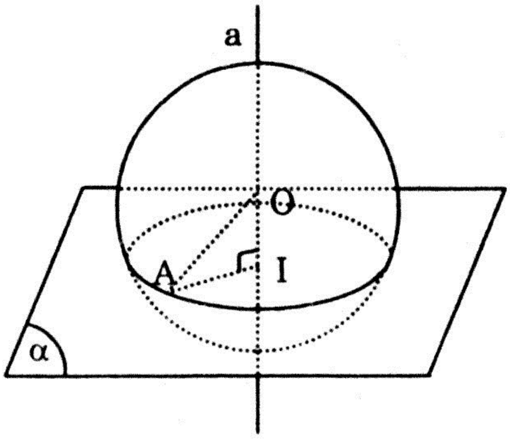
AD + BC = a + d + b + d;

Do đó các cặp cạnh đối diện của tứ diện thỏa mãn điều kiện của bài toán có tổng bằng nhau, nghĩa là:

AB + CD = AC + BD = AD + BC.

9. *Cho một điểm A cố định và một đường thẳng a cố định không qua A. Gọi O là một điểm thay đổi trên a. Chứng minh rằng các mặt cầu tâm O bán kính r = OA luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.*

Giải



Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng a tại I. Khi đó mặt cầu tâm O bán kính OA cắt mặt phẳng (α) theo một đường tròn tâm I bán kính IA không đổi.

Vậy các mặt cầu tâm O bán kính r = OA luôn luôn đi qua đường tròn cố định tâm I bán kính r' = IA không đổi.

10. *Cho hình chóp S.ABC có bốn đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính diện tích mặt cầu và thể tích của khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó.*

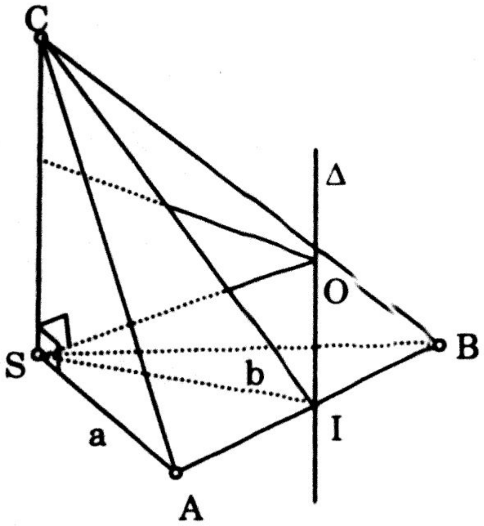
Giải

Gọi I là trung điểm AB. Vì ΔSAB vuông tại S nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mp(SAB) tại I thì mọi điểm trên Δ cách đều S, A, B. Gọi O là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực đoạn SC thì OS = OA = OB = OC. Vậy mặt cầu đi qua bốn điểm S, A, B, C có tâm O và bán kính r = OA.

Ta có: $r^2 = OA^2 = OI^2 + AI^2$

$$= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$



Diện tích mặt cầu là

$$S = 4\pi r^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$$

Thể tích khối cầu là

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi\sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho mặt cầu S(O; r) và điểm A biết OA = 2r. Qua A kẻ một tiếp tuyến với mặt cầu tại B và kẻ một cát tuyến cắt mặt cầu tại C và D. cho* $CD = r\sqrt{3}$.

a) Tính độ dài AB.

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD.

Đáp số: a) $AB = r\sqrt{3}$; b) $OH = \frac{r}{2}$.

2. *Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC = a và có chiều cao bằng h. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích mặt cầu đó:*

Đáp số: a) $r = \frac{a^2}{2h}$; b) $S = \pi\frac{a^4}{h^2}$.

3. *Cho hình cầu tâm O bán kính r. Lấy điểm A trên mặt cầu và gọi (α) là mặt phẳng đi qua A sao cho góc giữa OA và (α) bằng* 30^0.

a) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và mặt cầu.

b) Đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.

Đáp số: a) $S = \frac{3\pi r^2}{4}$; b) AB = r.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. *Cho ba điểm A, B, C cùng thuộc một mặt cầu và cho biết $\widehat{ACB} = 90^0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?*

a) Đường tròn qua ba điểm A, B, C nằm trên mặt cầu;

b) AB là một đường kính của mặt cầu đã cho;

c) AB không phải là đường kính của mặt cầu;

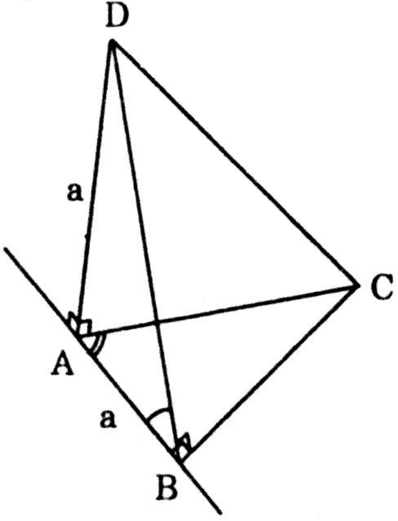
d) AB là đường kính của đường tròn giao tuyến tạo bởi mặt cầu và mặt phẳng (ABC).

Trả lời: Khẳng định a) và d) đúng.

2. *Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Biết AB = AD = a, tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón được tạo thành khi quay đường gấp khúc BDA quanh cạnh AB.*

Giải

Ta có $AD \perp (ABC)$ nên $AD \perp AB \Rightarrow \widehat{ABD}$ là góc nhọn.



Khi quay quanh cạnh AB đường gấp khúc BDA tạo nên một hình nón tròn xoay có đường sinh là BD, chiều cao AB = a và bán kính đáy AD = a.

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi r l = \pi AD.BD = \pi a.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{2}$$

Thể tích khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.a^2.a = \frac{\pi a^3}{3}.$$

3. *Chứng minh rằng hình chóp có tất cả các cạnh bên bằng nhau nội tiếp được trong một mặt cầu.*

Giải

Gọi S là đỉnh của hình chóp.

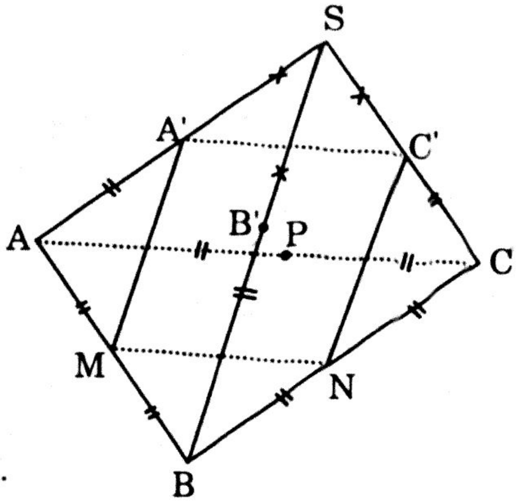
Giả sử SA = SB = SC = ... Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh S xuống đáy, ta có $SH \perp (ABC)$.

Vì SA = SB = SC = ... nên các hình chiếu HA = HB = HC = ...

Vậy hình chóp có đáy là đa giác nội tiếp trong một đường tròn tâm H bán kính HA. Gọi O là giao điểm mặt phẳng trung trực đoạn SA với SH thì O cách đều các đỉnh của hình chóp do đó hình chóp nội tiếp được trong một mặt cầu.

4. Hình chóp S.ABC có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh bên SA, SB, SC và tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA tại trung điểm mỗi cạnh. Chứng minh rằng hình chóp đó là hình chóp tam giác đều.

Giải



Gọi M, N, P là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và A', B', C' là tiếp điểm của các cạnh bên SA, SB, SC.

Ta có AM = AA' và BM = BB' mà AM = BM nên AA' = BB'.

Mặt khác SA' = SB' = SC' nên SA = SB.

Tương tự SB = SC nên chân đường cao kẻ từ S trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. ΔABC đều vì

AB = 2BM = 2BN = BC = 2CN = 2CP = CA.

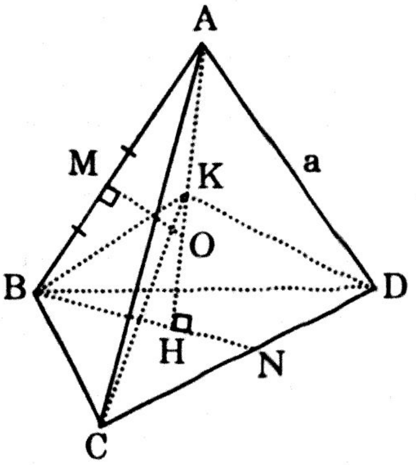
Vậy S.ABC là hình chóp tam giác đều.

5. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống mặt (BCD).

a) Chứng minh H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tính độ dài đoạn AH.

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của khối trụ có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác BCD và chiều cao AH.

Giải



a) Ta có AH $\perp$ (BCD) và ABCD là tứ diện đều nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều BCD (vì HB = HC = HD).

Ta có $BH = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

b) Diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi rl$

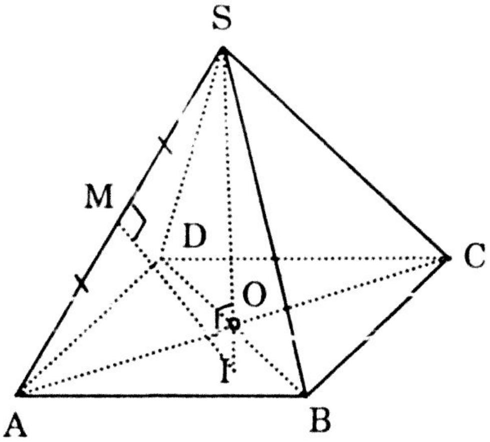
Ta có: $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $l = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $S_{xq} = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ và $V = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}$.

6. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Từ tâm O của hình vuông dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên Δ lấy điểm S sao cho

$OS = \frac{a}{2}$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó.

Giải



Gọi M là trung điểm của cạnh SA. Trong mặt phẳng (SAO) đường trung trực của đoạn SA cắt đường thẳng SO tại I. Hai tam giác vuông SAO và SIM đồng dạng nên ta có:

$$\frac{SA}{SO} = \frac{SI}{SM} \Rightarrow SI = \frac{SA.SM}{SO}$$

hay $$SI = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{3a}{4}$$

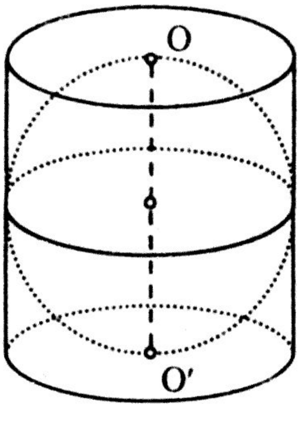
Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD có tâm là I và có bán kính $r = SI = \frac{3a}{4}$

Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu là:

$$S = 4\pi r^2 = \frac{9\pi a^2}{4} \text{ và } V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{9\pi a^3}{16}.$$

7. *Cho hình trụ có bán kính r, trục OO' = 2r và mặt cầu có đường kính OO'.*
   - *a) Hãy so sánh diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ.*
   - *b) Hãy so sánh thể tích khối trụ và thể tích khối cầu được tạo nên bởi hình trụ và mặt cầu đã cho.*

Giải



a) Ta có diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ bằng nhau và đều bằng $4\pi r^2$.

b) Gọi V_C là thể tích khối cầu, ta có $V_C = \frac{4}{3}\pi r^3$

Gọi V_T là thể tích khối trụ ta có $V_T = \pi r^2.2r = 2\pi r^3$

Do đó $\frac{V_T}{V_C} = \frac{3}{2}$. Vậy thể tích khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích khối trụ.

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy ngoại tiếp hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Diện tích S là

(A) πa^2; (B) $\pi a^2\sqrt{2}$; (C) $\pi a^2\sqrt{3}$; (D) $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

Trả lời: Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD là $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

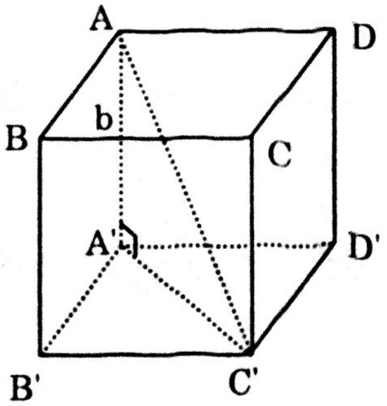
Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi r.l = 2\pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \pi a^2\sqrt{2}$$. Chọn (B).

2. Gọi S là diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được sinh ra bởi đoạn thẳng AC' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh b khi quay quanh trục AA'. Diện tích S là

(A) πb^2; (B) $\pi b^2\sqrt{2}$;

(C) $\pi b^2\sqrt{3}$; (D) $\pi b^2\sqrt{6}$.



Trả lời:

Ta có $AC' = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{3b^2} = b\sqrt{3}$

$A'C' = b\sqrt{2}$

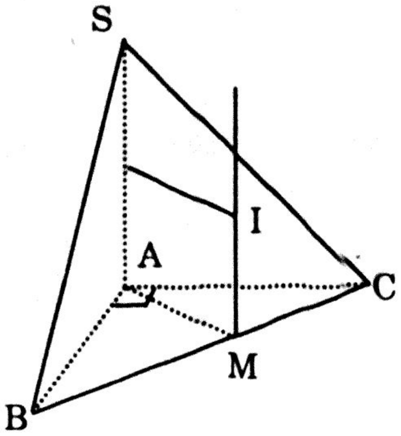
Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r.l = \pi.A'C'.AC' = \pi b\sqrt{2}.b\sqrt{3} = \pi b^2\sqrt{6}$$. Chọn (D).

3. Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại A, có SA vuông góc với (ABC) và có SA = a, AB = b và AC = c. Mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, S có bán kính r bằng

(A) $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$; (B) $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; (D) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Trả lời: Gọi M là trung điểm BC

Gọi I là điểm sao cho $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AS}$ thì

I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC. Bán kính mặt cầu này là

$$r = IA = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{\frac{BC^2}{4} + \frac{SA^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$. Chọn (C).

4 Cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động trong không gian nhưng luôn luôn thỏa mãn điều kiện $\widehat{MAB} = \alpha$ với $0^0 < \alpha < 90^0$. Khi đó điểm M thuộc mặt nào trong các mặt sau:

(A) Mặt nón; (B) Mặt trụ; (C) Mặt cầu; (D) Mặt phẳng.

Trả lời: M thuộc mặt nón. Chọn (A).

5 Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) vô số.

Trả lời: Có vô số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước. Chọn (D).

6 Trong các đa diện sau đây, đa diện nào không luôn luôn nội tiếp được trong mặt cầu:

(A) hình chóp tam giác (tứ diện); (B) hình chóp ngũ giác đều;

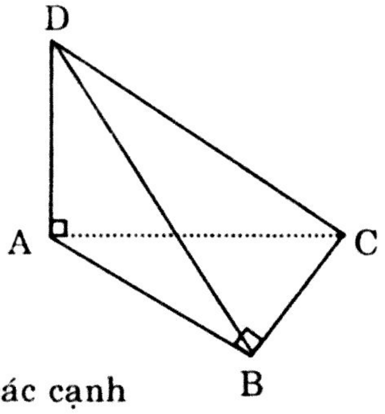
(C) hình chóp tứ giác; (D) hình hộp chữ nhật.

Trả lời: Hình chóp tứ giác không luôn luôn nội tiếp được trong mặt cầu. Chọn (C).

7 Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cạnh BD vuông góc với cạnh BC. Khi quay các cạnh tứ diện đó quanh trục là cạnh AB, có bao nhiêu hình nón được tạo thành?

(A) 1; (B) 2;

(C) 3; (D) 4.



Trả lời: Ta có AB ⊥ BC và AB ⊥ AD nên khi quay các cạnh tứ diện xung quanh trục là AB ta có 2 hình nón được tạo thành. Chọn (B).

8. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông ABCD và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông A'B'C'D'. Diện tích xung quanh của hình nón đó là:

(A) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$; (B) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$; (C) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; (D) $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$.

Trả lời: Đường tròn ngoại tiếp hình vuông A'B'C'D' có bán kính là $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích xung quanh hình nón có bán kính đáy $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường sinh.

$$l = OA' = \sqrt{AA'^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

là $$S_{xq} = \pi r l = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn (C).

9. Cho tam giác đều ABC cạnh a quay quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Diện tích xung quanh hình nón đó là:

(A) πa^2; (B) $2\pi a^2$; (C) $\frac{1}{2}\pi a^2$; (D) $\frac{3}{4}\pi a^2$.

Trả lời: Ta có bán kính hình nón $r = \frac{a}{2}$, đường sinh $l = a$. diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi.\frac{a}{2}.a = \frac{\pi a^2}{2}$. Chọn (C).

10. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào SAI?

(A) Mặt trụ và mặt nón có chứa các đường thẳng.

(B) Mọi hình chóp luôn nội tiếp trong mặt cầu.

(C) Có vô số mặt phẳng cắt mặt cầu theo những đường tròn bằng nhau.

(D) Luôn có hai đường tròn có bán kính khác nhau cùng nằm trên một mặt nón.

Trả lời: Các mệnh đề (A), (C), (D) đúng. Chọn (C).

11. Cho hình trụ có bán kính đáy là r; Gọi O, O' là tâm hai đáy với $O'O = 2r$. Một mặt cầu (S) tiếp xúc với hai đáy của hình trụ tại O và O'. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI ?

(A) Diện tích mặt cầu bằng diện tích xung quanh của hình trụ.

(B) Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ.

(C) Thể tích khối cầu bằng $\frac{3}{4}$ thể tích của khối trụ.

(D) Thể tích khối cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của khối trụ.

Trả lời: Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = 2\pi r.l = 4\pi r^2$
Diện tích toàn phần hình trụ: $S_{tp} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$.
Diện tích mặt cầu $S = 4\pi r^2$
Thể tích khối trụ $V_t = \pi r^2.h = 2\pi r^3$
Thể tích khối cầu $V_C = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ta có $\frac{V_c}{V_t} = \frac{2}{3}$. Chọn (C).

12. Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích thước là a, b, c. Khi đó bán kính r của mặt cầu bằng:

(A) $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; (B) $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(C) $r = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$; (D) $r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3}$.

Trả lời: Bán kính r của mặt cầu bằng nửa đường chéo hình hộp chữ nhật:

$$r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\text{. Chọn (A).}$$

13. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương cạnh a. Thể tích của khối trụ đó là

(A) $\frac{1}{2}\pi a^3$; (B) $\frac{1}{4}\pi a^3$; (C) $\frac{1}{3}\pi a^3$; (D) πa^3.

Trả lời: Bán kính đáy của hình trụ là $r = \dfrac{a}{2}$

Thể tích của khối trụ là: $V = \pi.r^2.h = \pi\dfrac{a^2}{4}.a = \pi.\dfrac{a^3}{4}$. Chọn (B).

14. Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của một hình nón, còn ba đỉnh còn lại của tứ diện nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là:

(A) $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$; (B) $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{2}$; (C) $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$; (D) $\pi a^2\sqrt{3}$.

Trả lời: Bán kính đáy của hình nón là: $r = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích xung quanh hình nón là:

$$S_{xq} = \pi.r.l = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a = \frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}\text{. Chọn (C).}$$

15. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai ?

(A) Bất kì một hình tứ diện nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

(B) Bất kì một hình chóp đều nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

(C) Bất kì một hình hộp nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

(D) Bất kì một hình hộp chữ nhật nào cũng có một mặt cầu ngoại tiếp.

Trả lời: Mệnh đề (A), (B), (D) đúng. Chọn (C).

16. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

(A) 1; (B) 2; (C) 1,5; (D) 1,2.

Trả lời:

Giả sử quả bóng bàn có bán kính là r thì chiều cao hình trụ là $h = 6r$.

Ta có $S_1 = 3.4\pi r^2 = 12\pi r^2$

$S_2 = 2\pi rl = 2\pi.r.6r = 12\,\pi r^2$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = 1$. Chọn (A).

17. Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Khi đó diện tích của đáy lọ hình trụ là

(A) $16\pi r^2$; (B) $18\pi r^2$; (C) $9\pi r^2$; (D) $36\pi r^2$.

Trả lời: Bán kính đáy của hình trụ là:

$$\frac{1}{2}(2r + 2r + 2r) = 3r$$

Diện tích đáy hình trụ là:

$$S = \pi(3r)^2 = 9\pi r^2.$$

Chọn (C).

18. Cho ba điểm A, C, B nằm trên một mặt cầu, biết rằng góc $\widehat{ACB} = 90^0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng ?

(A) AB là một đường kính của mặt cầu.

(B) Luôn có một đường tròn nằm trên mặt cầu ngoại tiếp tam giác ABC.

(C) Tam giác ABC vuông cân tại C.

(D) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu theo giao tuyến là một đường tròn lớn.

Trả lời: (A), (C) và (D) sai. Chọn (B).

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ CỦA VECTƠ

1. Hệ tọa độ trong không gian

Hệ trục tọa độ Đề-các trong không gian gồm ba trục x'Ox, y'Oy, z'Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục x'Ox, y'Oy, z'Oz. Điểm O được gọi là gốc tọa độ. Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ

Không gian gắn với hệ tọa độ Oxyz còn được gọi là không gian Oxyz.

2. Tọa độ của một điểm

$$M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

3. Tọa độ của vectơ

$$\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \text{ hoặc } \vec{a}(a_1;a_2;a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k}$$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Trong không gian Oxyz cho hai vectơ

$$\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3) \text{ và } \vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3).$$

Ta có:

a) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;a_2 + b_2;a_3 + b_3)$

b) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1;a_2 - b_2;a_3 - b_3)$

c) $k\vec{a} = (ka_1;ka_2;ka_3)$ với k là một số thực

Hệ quả

a) Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$.

Ta có: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

b) Vectơ $\vec{0}$ có tọa độ là (0; 0; 0)

c) Với $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho: $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, $a_3 = kb_3$.

d) Trong không gian Oxyz, nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

+ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

+ Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

III. TÍCH VÔ HƯỚNG

Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

a) Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

b) Độ dài của một vectơ:

Cho vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, ta có $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

c) Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ là

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

d) Gọi φ là góc giữa hai vectơ

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$.

Ta có: $\cos\varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

e) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm I(a; b; c) bán kính r có phương trình là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Hoặc $\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2$.

Ngược lại, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$.

với điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình của mặt cầu tâm $I(-A; -B; -C)$ có bán kính $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Cho ba vectơ* $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$

a) Tính tọa độ của vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$

b) Tính tọa độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$

Giải

a) Ta có: $4\vec{a} = (8; -20; 12)$; $-\frac{1}{3}\vec{b} = \left(0; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$3\vec{c} = (3; 21; 6)$

Do đó $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right)$

b) $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (0; -27; 3)$

2. *Cho ba điểm A = (1; –1; 1), B = (0; 1; 2), C = (1; 0; 1). Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.*

Giải

Tọa độ trọng tâm $G(x_G; y_G; z_G)$ của ΔABC là: $\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = 0 \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{4}{3} \end{cases}$

Vậy $G = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$

3. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' biết A = (1; 0; 1), B = (2; 1; 2), D = (1; –1; 1), C'= (4; 5; –5). Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.*

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$

$\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 2 = 0 \\ y_C - 1 = -1 \\ z_C - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases}$

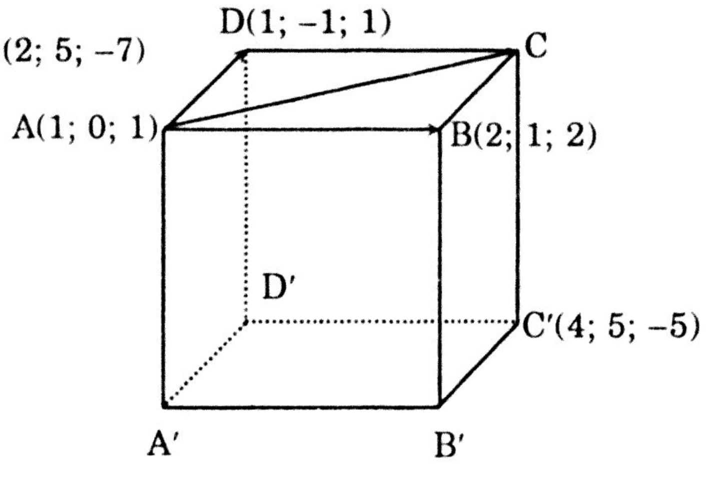
Vậy C = (2; 0; 2)

Suy ra $\overrightarrow{CC'} = (2; 5; -7)$

Từ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = (2; 5; -7)$

Suy ra $\begin{cases} x_A - 1 = 2 \\ y_A - 0 = 5 \\ z_A - 1 = -7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_A = 5 \\ z_A = -6 \end{cases}$.



Vậy $A' = (3; 5; -6)$

Tương tự $B' = (4; 6; -5)$, $D' = (3; 4; -6)$

4. *Tính:*

a) $\vec{a}.\vec{b}$ *với* $\vec{a} = (3; 0; -6)$, $\vec{b} = (2; -4; 0)$

b) $\vec{c}.\vec{d}$ *với* $\vec{c} = (1; -5; 2)$, $\vec{d} = (4; 3; -5)$

Giải

Áp dụng $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ với $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

a) Ta có $\vec{a}.\vec{b} = 3.2 + 0.(-4) + (-6).0 = 6$

b) $\vec{c}.\vec{d} = 1.4 + (-5).3 + 2(-5) = -21$

5. *Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau đây:*

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$

Giải

a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 2y + 1) + z^2 = 16 + 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 16$$

Vậy mặt cầu có tọa độ tâm $I(4; 1; 0)$ và bán kính $R = 4$.

b)
$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + \frac{8}{3}y + 5z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - 1 - \frac{16}{9} - \frac{25}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{361}{36} = \frac{19^2}{6^2}$$

Vậy mặt cầu có tọa độ tâm $I\left(1; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{2}\right)$ và có bán kính $R = \frac{19}{6}$

6. *Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau đây:*

a) Có đường kính AB với A(4; –3; 7), B(2; 1; 3).

b) Đi qua điểm A(5; –2; 1) và có tâm C(3; –3; 1).

Giải

a) Tâm I của mặt cầu đường kính AB là trung điểm I của đoạn thẳng AB, ta có $I\left(\frac{4+2}{2}; \frac{-3+1}{2}; \frac{7+3}{2}\right) = (3; -1; 5)$

Bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 9$.

b) Bán kính mặt cầu là $R = AC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

Phương trình mặt cầu là $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 5$.

C BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Trong không gian cho ba điểm A(1; 0; –2), B(2; 1; –1), C(1; –2; 2).*

a) Tìm độ dài các cạnh của tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trung điểm của các tam giác ABC.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Đáp số: a) $AB = \sqrt{3}$; $BC = \sqrt{19}$; $CA = 2\sqrt{5}$

b) $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $(1; -1; 0)$

c) $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

2. *Trong không gian Oxyz, hãy tìm trên mặt phẳng (Oxz) một điểm M cách đều ba điểm A(1; 1; 1), B(–1; 1; 0), C(3; 1; –1).*

Đáp số: $M\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$

3. *Cho A(2; 0; 1), B(–1; 2; 3). Tìm cosin của các góc tạo bởi ba vectơ đơn vị* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ *trên ba trục Ox, Oy, Oz và vectơ* $\overrightarrow{AB}$.

Đáp số: $-\frac{3}{\sqrt{17}}$; $\frac{2}{\sqrt{17}}$; $\frac{2}{\sqrt{17}}$

4. *Trong không gian Oxyz hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:*

a) Có tâm I(5; –3; 7) và có bán kính r = 2;

b) Có tâm là điểmC(4; –4; 2) và đi qua gốc tọa độ;

c) Đi qua điểm M(2; –1; –3) và có tâm C(3; –2; 1).

5. ***Trong không gian Oxyz hãy xác định tâm và bán kính các mặt cầu có phương trình sau đây:***

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 16z - 26 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 4y - 12z - 100 = 0$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Cho mặt phẳng (α). Nếu vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẲNG

1. Nếu mặt phẳng (α) song song hoặc chứa giá của hai vectơ khác phương là

$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì (α) có một vectơ pháp tuyến là

$\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} \wedge \vec{b}$, hoặc $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

2. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A;B;C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

3. Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là

$Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A;B;C)$.

4. Nếu mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm có tọa độ là $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì (α) có phương trình theo đoạn chắn là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

III. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

Cho (α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$

(α_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$; $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$

$$(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

$$(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

$$(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

IV KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Định lí: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P), kí hiệu là $d(M_0, (P))$, được tính theo công thức

$$\boxed{d(M,(P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian Oxyz.

1. Viết phương trình của mặt phẳng

a) Đi qua điểm M(1; −2; 4) và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vectơ pháp tuyến.

b) Đi qua điểm A(0; −1; 2) và song song với giá của hai vectơ $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (-3;0;1)$.

c) Đi qua ba điểm A(−3; 0; 0), B(0; −2; 0), C(0; 0; −1).

Giải

a) Mặt phẳng (α) đi qua M(1; −2; 4) và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là:

(α): $2(x - 1) + 3(y + 2) + 5(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 5z - 16 = 0$

b) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đã cho là $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{v}] = (2; -6; 6)$.

(α) qua A(0; −1; 2) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -6; 6)$ có phương trình là: $2(x - 0) - 6(y + 1) + 6(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3z - 9 = 0$.

c) Mặt phẳng (α) có phương trình theo đoạn chắn là:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1} = 1 \text{ hay } 2x + 3y + 6z + 6 = 0$$

2. *Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A(2; 3; 7), B(4; 1; 3).*

Giải

Đoạn thẳng AB có trung điểm là I(3; 2; 5). Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, ta có (α) đi qua I và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -4)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$2(x - 3) - 2(y - 2) - 4(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x - y - 2z + 9 = 0$$

3. *a) Lập phương trình của các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).*

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm M(2; 6; −3) và lần lượt song song với các mặt phẳng toạ độ.

Giải

a) Mặt phẳng Oxy đi qua gốc toạ độ O(0; 0; 0) và có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$ nên có phương trình là: $z = 0$.

Tương tự mặt phẳng (Oyz), (Oxz) lần lượt có phương trình là $x = 0$, $y = 0$.

b) Gọi (α), (β), (γ) là các mặt phẳng đi qua điểm M(2; 6; –3) và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz) và (Ozx).

Ta suy ra các mặt phẳng (α), (β), (γ) có phương trình lần lượt là:

$$z + 3 = 0,\ x - 2 = 0,\ y - 6 = 0.$$

4. *Lập phương trình của mặt phẳng:*

a) Chứa trục Ox và điểm P(4; –1; 2).

b) Chứa trục Oy và điểm Q(1; 4; –3).

c) Chứa trục Oz và điểm R(3; –4; 7).

Giải

a) Mặt phẳng (α) chứa P(4; –1; 2) và trục Ox thì (α) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$ và $\overrightarrow{OP} = (4; -1; 2)$. Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{i}, \overrightarrow{OP}\right] = (0; -2; -1)$.

Phương trình của (α) là:

$$-2y - z = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 0.$$

b) Mặt phẳng (β) chứa Q(1; 4; –3) và trục Oy thì (β) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\overrightarrow{OQ} = (1; 4; -3)$. Do đó (β) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{j}, \overrightarrow{OQ}] = (-3; 0; -1)$.

Phương trình của (β) là:

$$-3x - z = 0 \Leftrightarrow 3x + z = 0.$$

c) Mặt phẳng (γ) chứa điểm R(3; –4; 7) và trục Oz và (γ) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{k} = (0; 0; 1)$ và $\overrightarrow{OR} = (3; -4; 7)$ do đó (γ) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\vec{k}, \overrightarrow{OR}\right] = (4; 3; 0)$.

Phương trình của (γ) là $4x + 3y = 0$.

5. *Cho tứ diện có các đỉnh là A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)*

a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD).

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AC} = (0; -1; 1)$; $\overrightarrow{AD} = (-1; -1; 3)$

Mặt phẳng (ACD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = (-2; -1; -1)$

Vậy phương trình của mặt phẳng (ACD) là:

$$-2(x - 5) - 1(y - 1) - 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 14 = 0$$

Tương tự mặt phẳng (BCD) có phương trình là: $6x + 5y + 3z - 42 = 0$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1)$ và $\overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2)$, suy ra mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (10; 9; 5)$

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 10x + 9y + 5z - 74 = 0$$

6. *Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z + 4 = 0$.*

Giải

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) nên (α) có dạng:

(α): $2x - y + 3z + D = 0$.

Vì (α) qua $M(2; -1; 2)$ nên $2.2 + 1 + 3.2 + D = 0 \Rightarrow D = -11$

Vậy (α): $2x - y + 3z - 11 = 0$.

7. *Lập phương trình của mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + z - 7 = 0$.*

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 2)$ và vectơ pháp tuyến của mp(β) là $\overrightarrow{n_\beta} = (2; -1; 1)$

Vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_\beta}\right] = (1; 0; -2)$

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$1(x - 1) + 0.(y - 0) - 2.(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 1 = 0$$

8. *Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau:*

a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$

b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$

Giải

a) Với mặt phẳng (α): $2x + my + 3z - 5 = 0$ và (β): $nx - 8y - 6z + 2 = 0$.

Ta có: $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \dfrac{n}{2} = \dfrac{m}{-8} = \dfrac{3}{-6} \neq \dfrac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 \\ m = 4 \end{cases}$

b) Với mặt phẳng (α): $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và (β): $2x + ny - 3z + 1 = 0$.

Ta có: $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{-5}{n} = \dfrac{m}{-3} \neq \dfrac{-3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\dfrac{10}{3} \\ m = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$

9. *Tính khoảng cách từ điểm A(2; 4; – 3) lần lượt đến các mặt phẳng sau:*

a) $2x - y + 2z - 9 = 0$; *b)* $12x - 5z + 5 = 0$; *c)* $x = 0$

Giải

a) Với mặt phẳng (α): $2x - y + 2z - 9 = 0$,

ta có: $d(A, (\alpha)) = \dfrac{|2.(2) - (4) + 2(-3) - 9|}{\sqrt{4+1+4}} = 5$

b) Với mặt phẳng (β): $12x - 5z + 5 = 0$,

ta có: $d(A, (\beta)) = \dfrac{|12(2) - 5(-3) + 5|}{\sqrt{144+25}} = \dfrac{44}{13}$

c) Với mặt phẳng (γ): $x = 0$, ta có: $d(A, (\gamma)) = \dfrac{|2|}{\sqrt{1+0+0}} = 2$

10. *Giải bài toán sau đây bằng phương pháp toạ độ: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1.*

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (AB'D') và (BC'D) song song với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng nói trên.

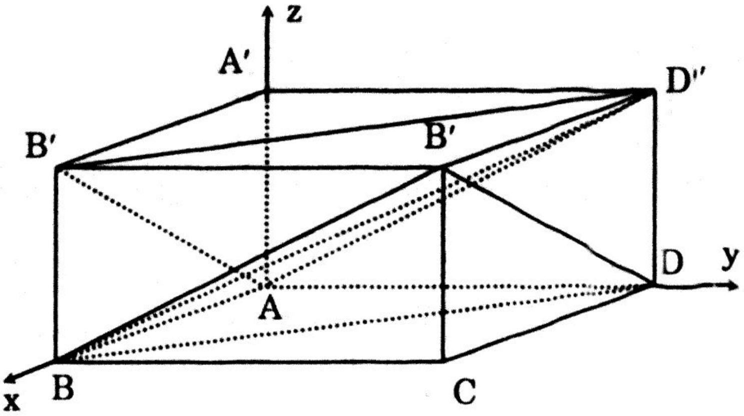
Giải

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. Ta có:

A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0)

A'(0; 0; 1), B'(1; 0; 1), C'(1; 1; 1), D'(0; 1; 1)

a) Đặt $(\alpha) = (AB'D')$ và $(\beta) = (BC'D)$. Ta có: $\overrightarrow{AB'} = (1; 0; 1)$ và $\overrightarrow{AD'} = (0; 1; 1)$, suy ra mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (1; 1; -1)$



Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là $x + y - z = 0$.

Ta có $\overrightarrow{BC'} = (0; 1; 1)$

và $\overrightarrow{BD} = (-1; 1; 0)$

Suy ra mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến là

$\vec{n} = [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}] = (-1; -1; 1)$

Phương trình mp(β) là:

$-1(x - 1) - 1.y + 1.z = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0.$

Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1}$, vậy hai mặt phẳng (α) và (β) song song nhau.

b) $d((\alpha), (\beta)) = d(A, (\beta)) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Viết phương trình mặt phẳng trong những trường hợp sau:*

a) Đi qua điểm $M_0 = (1; 3; -2)$ và vuông góc với trục Oy.

b) Đi qua điểm $M_0 = (1; 3; -2)$ và vuông góc với đường thẳng M_1M_2, ở đây $M_1 (0; 2; -3)$, $M_2 = (1; -4; 1)$.

c) Đi qua điểm $M_0 = (1; 3; -2)$ và song song với mặt phẳng $2x - y + 3z + 4 = 0$.

Đáp số:

a) $y - 3 = 0$; b) $x - 6y + 4z + 25 = 0$; c) $2x - y + 3z + 7 = 0$.

2. *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua 2 điểm A(2, −1, 4), B(3, 2, −1) và vuông góc với mặt phẳng $x + y + 2z - 3 = 0$.*

Hướng dẫn: (α) đi qua A(2, −1, 4) nhận $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$ và $\vec{n} = (1, 1, 2)$ làm cặp vectơ chỉ phương. (α): $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

3. *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua M(3, −1, −5) đồng thời vuông góc với mặt phẳng $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và mặt phẳng:*

$$5x - 4y + 3z + 1 = 0.$$

Hướng dẫn: (α) qua M(3, −1, −5) nhận $\vec{n} = (3, -2, 2)$; $\vec{m} = (5, -4, 3)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên có pháp vectơ $\vec{u} = (2, 1, -2)$.

$$(\alpha): 2x + y - 2z - 15 = 0.$$

4. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' biết A'(0, 0, 0), B'(a, 0, 0), O'(0, a, 0), A(0, 0, a) trong đó a > 0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và B'C'. viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và song song với hai đường thẳng AN và BD'.*

Hướng dẫn: Vectơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{AN} = \left(a, \frac{a}{2}, -a\right) = \frac{a}{2}(2, 1, -2); \ \overrightarrow{BD'} = (-a, a, -a) = -a(1, -1, 1)$$

Pháp vectơ là: $\vec{n} = (-1, -4, -3)$, (α): $x + 4y + 3z - \frac{7a}{2} = 0$.

5. *Cho A(2; 3; 4). Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua các hình chiếu của A trên các trục tọa độ.*

Đáp số: (α): $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tham số của đường thẳng

a) Định lí: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ và nhận $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ làm vectơ chỉ phương. Điều kiện cần và đủ để điểm M(x; y; z) nằm trên Δ là có một số thực t

sao cho: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$

b) Định nghĩa: Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ là phương trình có

dạng: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$, trong đó t là tham số.

2. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì người ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT NHAU, CHÉO NHAU

Cho hai đường thẳng d và d' lần lượt đi qua $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M'_0(x'_0;\ y'_0;\ z'_0)$ và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$; $\vec{a}'(a'_1;\ a'_2;\ a'_3)$.

Gọi $\vec{n}=[\vec{a},\ \vec{a}']$

1) $d \,//\, d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}=\vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$

2) $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}=\vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$

3) d cắt d' $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}\neq\vec{0} \\ \vec{n}.\overrightarrow{M_0M'_0}=0 \end{cases}$

4) d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{M_0M'_0}\neq 0$

5) $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{a}'=0$

III. ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT HOẶC VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

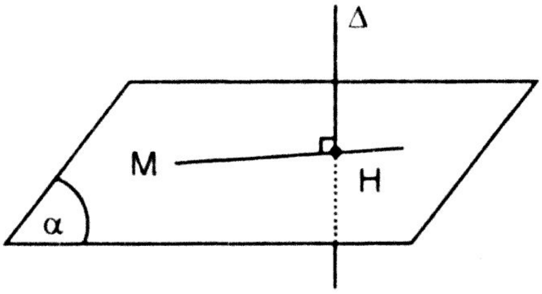
Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và cho mặt phẳng (α) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$. Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ là vectơ pháp tuyến của (α). Ta có các điều kiện sau:

1) $d \,//\, (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases}$ **2)** $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$

3) d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n} \neq \vec{0}$ **4)** $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{a}$.

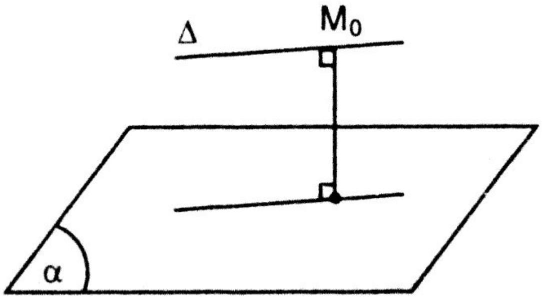
IV. TÍNH KHOẢNG CÁCH

1. Trong không gian Oxyz, để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta thực hiện các bước:



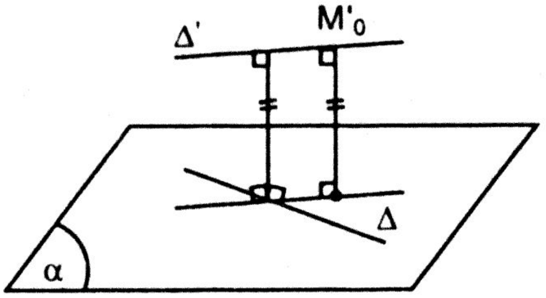
   - Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với Δ;
   - Tìm giao điểm H của Δ với (α);
   - Khoảng cách từ M đến Δ chính là khoảng cách giữa hai điểm M và H: $d(M, \Delta) = MH$.

2. Để tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với Δ ta thực hiện các bước:



   - Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ tùy ý trên Δ;
   - Khoảng cách giữa Δ và (α) chính là khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α): $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$.

3. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' ta thực hiện các bước:



   - Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với đường thẳng Δ';
   - Lấy một điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ tùy ý trên Δ';
   - Khoảng cách giữa Δ và Δ' chính là khoảng cách từ điểm M'_0 đến mặt phẳng (α): $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha))$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:*

a) d đi qua điểm M(5; 4; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$.

b) d đi qua điểm A(2; –1; 3) và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình $x + y - z + 5 = 0$.

c) d đi qua điểm B(2; 0; – 3) và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$

d) d đi qua hai điểm P(1; 2; 3) và Q(5; 4; 4).

Giải

a) Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

b) Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α): $x + y - z + 5 = 0$ nên d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; 1; -1)$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

c) Đường thẳng d song song với đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$

nên d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3; 4)$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

d) Đường thẳng d đi qua hai điểm P(1; 2; 3) và Q(5; 4; 4) nên d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{PQ} = (4; 2; 1)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

2. *Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d):* $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ *lần lượt trên các mặt phẳng sau:*

a) (Oxy) *b) (Oyz)*

Giải

) Phương trình mp(Oxy) là $z = 0$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (Oxy)

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{a} = (1; 2; 3)$.

Mp(α) nhận cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$, do đó vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}, \vec{k}] = (2; -1; 0)$.

Hình chiếu vuông góc d' của d trên Oxy là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (Oxy).

Ta có (α) đi qua $M(2; -3; 1)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 0)$ nên (α) có phương trình: $2(x - 2) - (y + 3) = 0$.

Vậy $M(x; y; z) \in d' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (*)

Vectơ chỉ phương của d' vuông góc với $\vec{n}_\alpha$ và $\vec{k}$ nên d' có vectơ chỉ phương là: $\vec{a}_{d'} = [\vec{n}_\alpha, \vec{k}] = (-1; -2; 0)$.

Từ (*) cho $x = 2 \Rightarrow y = -3$, $z = 0$ do đó $A(2; -3; 0) \in d'$.

Phương trình tham số của d' là: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$

) Phương trình mp(Oyz) là $x = 0$.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mp(Oyz).

Mp(β) nhận $\vec{a}$ và $\vec{i} = (1; 0; 0)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên vectơ pháp tuyến của (β) là: $\vec{n}_\beta = [\vec{a}, \vec{i}] = (0; 3; -2)$.

(β) đi qua $M(2; -3; 1)$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta$ nên (β) có phương trình:

$$3(y - 2) - 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3y - 2z - 4 = 0$$

Ta có $M(x; y; z) \in d'' \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ (**)

(d" là hình chiếu của d lên mp(Oyz)).

Vectơ chỉ phương của d" vuông góc với $\vec{n}_\beta$ và $\vec{i}$ nên d" có vectơ chỉ phương là: $\vec{a}_{d''} = [\vec{n}_\beta, \vec{i}] = (0; -2; -3)$.

Từ (**) cho $z = 1 \Rightarrow y = 2$, $x = 0$. Do đó, $B(0; 2; 1) \in d''$.

Phương trình tham số của d" là: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2t \\ x = 1 - 3t \end{cases}$

3. ***Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:***

a) $d:\begin{cases}x=-3+2t\\y=-2+3t\\z=6+4t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=5+t'\\y=-1-4t'\\z=20+t'\end{cases}$

b) $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3-t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1+2t'\\y=-1+2t'\\z=2-2t'\end{cases}$

Giải

a) Xét hệ phương trình: $\begin{cases}-3+2t=5+t' & (1)\\-2+3t=-1-4t' & (2)\\6+4t=20+t' & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\begin{cases}2t-t'=8\\3t+4t'=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=3\\t'=-2\end{cases}$

Các giá trị này của t và t' thỏa mãn phương trình (3). Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại M(3; 7; 18).

b) Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;1;-1)$, đường thẳng d' đi qua điểm M'(1; –1; 2) và có có vectơ chỉ phương là $\vec{a}'=(2;2;-2)$.

Ta có: $\vec{a}'=2\vec{a}$ và $M\notin d'$. Suy ra d' // d.

4. ***Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau***

d: $\begin{cases}x=1+at\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1-t'\\y=2+2t'\\z=3-t'\end{cases}$

Giải

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau đây đối với t và t' có nghiệm: $\begin{cases}1+at=1-t' & (1)\\t=2+2t' & (2)\\-1+2t=3-t' & (3)\end{cases}$

Từ hệ (2) và (3) ta suy ra $\begin{cases}t=2\\t'=0\end{cases}$

Thay các giá trị trên của t và t' vào phương trình (1) ta được: $1+2a\Leftrightarrow a=0$.

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi a = 0.

5. ***Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:***

a) d : $\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ *và* $(\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0$

b) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ *và* $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0$

c) d: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ *và* $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$

Giải

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (4; 3; 1)$ Mp(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5; -1)$

Ta có $\vec{a}.\vec{n} = 4.3 + 3.5 + 1.(-1) = 26 \neq 0$

Vậy d không song song với (α) nên d cắt (α) tại một điểm duy nhất.

b) d đi qua điểm M(1; 2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -1; 2)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3; 1)$.

Ta có: $\vec{a}.\vec{n} = 1 - 3 + 2 = 0$ (1) và $M \notin (\alpha)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra d // (α) hay đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung.

c) d đi qua điểm N(1; 1; 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; -3)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Ta có: $\vec{a}.\vec{n} = 1 + 2 - 3 = 0$ (1) và $\Rightarrow N \in (\alpha)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) hay d và (α) có vô số điểm chung.

6. *Tính khoảng cách giữa đường thẳng* Δ: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ *và mặt phẳng*

$$(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$$

Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm M(–3; –1; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3; 2)$; mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -2; 1)$.

Ta có: $\vec{a}.\vec{n} = 4 - 6 + 2 = 0$ (1) và $M \notin (\alpha)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra Δ // (α)

Vậy $d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = \dfrac{|2(-3) - 2(-1) - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \dfrac{2}{3}$.

7. *Cho điểm A(1; 0; 0) và đường thẳng Δ:* $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ

b) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng của A qua đường thẳng Δ

Giải

a) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = (1; 2; 1)$

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ

Khi đó (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = \vec{a}_\Delta = (1; 2; 1)$

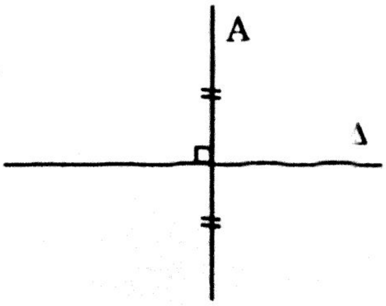
Phương trình mặt phẳng (α) là:

$$1.(x - 1) + 2.y + 1.z = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 1 = 0 \qquad (1)$$

Hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng Δ là giao điểm của Δ và (α).

Thay x = 2 + t, y = 1 + 2t, z = t vào (1) ta được

$$2 + t + 2 + 4t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$



Suy ra $x = \frac{3}{2}; y = 0; z = -\frac{1}{2}$

Vậy $H(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2})$

Cách khác: Gọi H(2 + t; 1 + 2t; t) là hình chiếu vuông góc của A trên Δ, ta có: $\overrightarrow{AH} = (1 + t; 1 + 2t; t)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = (1; 2; 1)$.

Do $\overrightarrow{AH}.\vec{a}_\Delta = 0$, ta suy ra $t = -\frac{1}{2}$. Vậy ta được $H = \left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$.

b) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 1 = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) \\ y_{A'} - 0 = 2(0 - 0) \\ z_{A'} - 0 = 2\left(-\frac{1}{2} - 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 0 \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = -1 \end{cases}$$

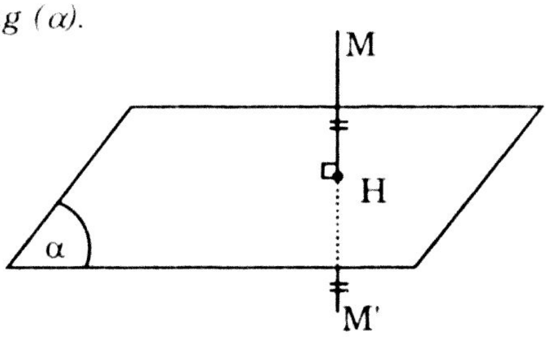
Vậy ta được A'(2; 0; –1).

8. *Cho điểm M (1; 4; 2) và mặt phẳng (α): x + y + z – 1 = 0*

a) Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

b) Tìm toạ độ điểm M' đối xứng của M qua mặt phẳng (α).

c) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α).



Giải

a) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (α), vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = \vec{a}_\Delta = (1; 1; 1)$ là vectơ chỉ phương của Δ nên Δ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + t & (1) \\ y = 4 + t & (2) \\ z = 2 + t & (3) \\ x + y + z - 1 = 0 & (4) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được:

$$1 + t + 4 + t + 2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Khi đó $x = -1$; $y = -2$; $z = 0$. Vậy H(−1; 2; 0).

b) Gọi M' là điểm đối xứng của M qua (α)

Ta có $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - 1 = -4 \\ y_{M'} - 4 = -4 \\ z_{M'} - 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -3 \\ y_{M'} = 0 \\ z_{M'} = -2 \end{cases}$

Vậy M'(−3; 0; −2).

c) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α)

$$d(M, (\alpha)) = MH = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}$$

Cách khác: $d(M, (\alpha)) = \dfrac{|1 + 4 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

9. *Cho hai đường thẳng:* $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ *và* $d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}$, *chứng minh d và d' chéo nhau.*

Giải

Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(1; 2; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 2; 3)$

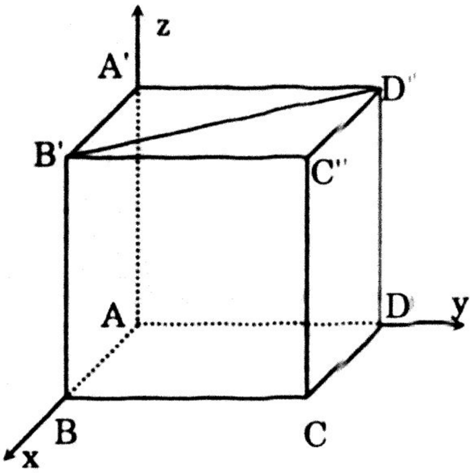
Đường thẳng d' đi qua điểm $M'_0(1; 3; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (1; -2; 0)$

Ta có $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{a}'] = (6; 3; 0)$

$$\overrightarrow{M_0M'_0} = (0; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'_0}.\vec{n} = 3 \neq 0$$

Vậy d và d' chéo nhau.

10. *Giải bài toán sau đây bằng phương pháp toạ độ: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến các mặt phẳng (A'BD) và (B'D'C).*



Giải

Ta chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho O ≡ A, $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AA'}$

Trong hệ tọa độ Oxyz ta có: A'(0; 0; 1), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), B'(1; 0; 1), D'(0; 1; 1), C(1; 1; 0).

Đặt (α) = (A'BD) và (β) = (B'D'C), ta có phương trình của các mặt phẳng (α), (β) là:

$$(\alpha): \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0;$$

$$(\beta): (x - 1) + (y - 1) + z = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0;$$

Vì A(0; 0; 0) nên: $d(A, (\alpha)) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$d(A, (\beta)) = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:*

a) d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$; *d':* $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-7}{2}$

b) d: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ *và d':* $\begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 8 + 2t' \\ z = 10 - 2t' \end{cases}$

c) d: $\begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ *và d':* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5t \end{cases}$

2. *Tính khoảng cách từ A(1; 0; 1) đến đường thẳng Δ:* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

3. *Cho M(2; –1; 1) và đường thẳng Δ:* $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

a) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng Δ.

b) Tính khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ.

4. *Cho hai đường thẳng: d:* $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ *và d':* $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}$

Lập phương trình đường vuông góc chung của d và d' và khoảng cách giữa d và d'.

5. *Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Bằng phương pháp tọa độ, hãy tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng CA' và DD'.*

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Các bài toán sau đều cho trong hệ tọa độ Oxyz.

1. *Cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(−2; 1; − 1).*

a) Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh của tứ diện.

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

c) Tính độ dài đường cao của hình chóp A.BCD.

Giải

a) Đường thẳng AB đi qua A(1; 0; 0) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$.
Đường thẳng CD đi qua C(0; 0; 1) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{CD} = (-2; 1; -2)$

Ta có $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (-2; -2; 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = (-2)(-1) + (-2).0 + 1.1 = 3 \neq 0.$$

Suy ra AB và CD chéo nhau nên A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

Cách khác: Ta có $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$ và $\overrightarrow{BD} = (-2; 0; -1)$

Mp(BCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (1; -2; -2)$

Phương trình mp(BCD) là:

$$x - 2(y - 1) - 2z = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0 \qquad (1)$$

Tọa độ điểm A không thỏa (1) nên A ∉ mp(BCD)

Vậy A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$; $\overrightarrow{CD} = (-2; 1; -2)$

$$\cos(AB, CD) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{AB.CD} = \frac{|2 + 1 + 0|}{\sqrt{2}.\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy $(AB, CD) = 45^0$

c) Phương trình mp(BCD) là: $x - 2y - 2z + 2 = 0$

Độ dài đường cao của hình chóp A.BCD là khoảng cách từ A đến mp(BCD), ta có

$$AH = d(A, (BCD)) = \frac{|1 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1.$$

2. *Mặt cầu (S) có đường kính là AB biết rằng A(6; 2; –5), B(–4; 0; 7).*

a) Tìm toạ độ tâm I và tính bán kính r của mặt cầu (S).

b) Lập phương trình của mặt cầu (S).

c) Lập phương trình của mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm (A).

Giải

a) Tâm I của mặt cầu là trung điểm của AB. Ta có I(1; 1; 1), bán kính $r = IA = \sqrt{62}$.

b) Phương trình của mặt cầu (S) là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 62$.

c) Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A, suy ra (α) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA} = (5; 1; -6)$.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là:

$$5(x - 6) + 1(y - 2) - 6(z + 5) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 6z - 62 = 0.$$

3. *Cho bốn điểm A(–2; 6; 3), B(1; 0; 6), C(0; 2; –1), D(1; 4; 0).*

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra ABCD là một tứ diện.

b) Tính chiều cao AH của tứ diện ABCD.

c) Viết phương trình của mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -7)$, $\overrightarrow{BD} = (0; 4; -6)$

Mp(BCD) có vectơ pháp tuyến: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (16; -6; -4)$

Mp(BCD) đi qua B(1; 0; 6) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (16; -6; -4)$ nên có phương trình là:

$$16(x - 1) - 6y - 4(z - 6) = 0 \Leftrightarrow 8x - 3y - 2z + 4 = 0$$

Vì $A \notin (BCD)$ nên ABCD là một tứ diện.

b) Chiều cao AH của tứ diện là khoảng cách từ A đến mp(BCD).

Ta có: $$AH = d(A, (BCD)) = \frac{|8(-2) - 3.6 - 2.3 + 4|}{\sqrt{8^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{36}{\sqrt{77}}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -6; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (1; 2; 1)$

Mp(α) chứa $\overrightarrow{AB}$ và song song với CD có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (-12; 0; 12)$$

Phương trình mặt phẳng (α) là:

$$-12(x-1)+0(y-0)+12(x-6)=0 \Leftrightarrow x-z+5=0.$$

4. *Lập phương trình tham số của đường thẳng*

a) Đi qua hai điểm $A(1; 0; -3)$, $B(3; -1; 0)$

b) Đi qua điểm $M(2; 3; -5)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x=-2+2t \\ y=3-4t \\ z=-5t \end{cases}$$

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2; -1; 3)$

Đường thẳng AB đi qua $A(1; 0; -3)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(2; -1; 3)$

nên có phương trình tham số là: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-3+3t \end{cases}$

b) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là: $\vec{a}=(2; -4; -5)$

Đường thẳng d đi qua $M(2; 3; -5)$ song song với Δ nên cũng có vectơ chỉ phương $\vec{a}$. Vậy phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-4t \\ z=-5-5t \end{cases}$

5. *Cho mặt cầu (S) có phương trình: $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ và mặt phẳng (α) có phương trình: $2x-2y-z+9=0$. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn $(\mathscr{C})$. Hãy xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.*

Giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(3; -2; 1)$ và có bán kính $R=10$.

$$d(I,(\alpha))=\frac{|2.3+2.2-1+9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=6$$

Ta có: $d(I,(\alpha))=6<10$, suy ra mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn $(\mathscr{C})$.

Tâm J của $(\mathscr{C})$ chính là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α).

Đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với (α) nên Δ có phương trình là:

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases}$$

Δ cắt (α) tại $J(3+2t; -2-2t; 1-t)$. Vì $J \in (\alpha)$ nên ta có:

$$2(3+2t)-2(-2-2t)-(1-t)+9=0 \Leftrightarrow 9t+18=0 \Leftrightarrow t=-2.$$

Vậy ta được $J(-1; 2; 3)$.

Bán kính r của $(\mathscr{C})$ được tính theo công thức:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I,(\alpha))} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

Vậy đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm J(−1; 2; 3) và bán kính r = 8.

6. *Cho mặt phẳng (α) có phương trình 3x + 5y − z − 2 = 0 và đường thẳng d có phương trình:*

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

a) Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa điểm M và vuông góc với đường thẳng d.

Giải

a) Thay x = 12 + 4t, y = 9 + 3t, z = 1 + t vào phương trình mp(α) ta được

$$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 26t + 78 = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Khi đó x = y = 0, z = −2.

Vậy d cắt (α) tại điểm M(0; 0; −2)

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_d = (4; 3; 1)$

Mp(β) vuông góc với d thì (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{a}_d = (4; 3; 1)$ nên (α) có phương trình là:

$$4(x - 0) + 3(y - 0) + 1(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + z + 2 = 0.$$

7. *Cho điểm A(−1; 2; − 3), vectơ $\vec{a} = (6; -2; -3)$ và đường thẳng d có phương trình:*

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với $\vec{a}$.

b) Tìm giao điểm của d và (α).

c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với $\vec{a}$ và cắt đường thẳng d.

Giải

a) Mặt phẳng (α) đi qua A(−1; 2; −3) có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = \vec{a} = (6; -2; -3) = 0$ nên có phương trình là:

$$6(x + 1) - 2(y - 2) - 3(z + 3) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2y + 3z + 1 = 0 \quad (1)$$

b) Thay x = 1 + 3t, y = −1 + 2t, z = 3 − 5t vào phương trình (1) ta được

$$6(1 + 3t) - 2(-1 + 2t) - 3(3 - 5t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Khi đó: x = 1, y = −1, z = 3. Vậy d cắt (α) tại điểm M(1; −1; 3).

c) Đường thẳng Δ đi qua A vuông góc với giá của $\vec{a}$ và cắt đường thẳng d chính là đường thẳng AM. Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (2; -3; 6)$.

Phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$

8. *Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu*

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 170 = 0$$

và song song với hai đường thẳng: $d: \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -13 + 2t \end{cases}$; $d': \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 8 \end{cases}$

Giải

Đường thẳng d và d' lần lượt có vectơ chỉ là $\vec{a} = (2; -3; 2)$ và $\vec{a}' = (3; -2; 0)$.

Mặt phẳng (α) song song với d và d' có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{a}'] = (4; 6; 5)$$

Vậy (α) có dạng: $4x + 6y + 5z + D = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(5; -1; -13)$ và bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{25 + 1 + 169 - 170} = 5$$

Ta có: (α) tiếp xúc với (S) ⇔ $d(I, (\alpha)) = R$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|4.(5) + 6.(-1) + 5.(-13) + D|}{\sqrt{16 + 36 + 25}} = 5$$

$$\Leftrightarrow \quad |D - 51| = 5\sqrt{77} \Leftrightarrow D = 51 \pm 5\sqrt{77}$$

Vậy ta có hai mặt phẳng (α) thỏa mãn đề bài. Phương trình tổng quát của (α) là: $4x + 6y + 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$.

9. *Tìm toạ độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M(1; – 1; 2) trên mặt phẳng (α): 2x – y + 2z + 11 = 0.*

Giải

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với d thì vectơ chỉ phương của d là $\vec{a}_d = \vec{n}_\alpha = (2; -1; 2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Giao điểm H của d và (α) là hình chiếu vuông góc của M trên mp(α).

Thay $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 2 + 2t$ vào phương trình mp(α), ta được

$$2(1 + 2t) - (-1 - t) + 2(2 + 2t) + 11 = 0 \Leftrightarrow 9t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Khi đó $x = -3$; $y = 1$; $z = -2$.

Vậy $H(-3; 1; -2)$.

***10.** Cho điểm M(2; 1; 0) và mặt phẳng (α): x + 3y − z − 27 = 0. Tìm toạ độ điểm M' đối xứng với M qua (α).*

Giải

Gọi H là hình chiếu của M lên mp(α).

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α) d có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_d = \vec{n}_\alpha = (1; 3; -1)$

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -t \end{cases}$

Thay x = 2 + t, y = 1 + 3t, z = −t vào phương trình mp(α), ta được

$$(2 + t) + 3(1 + 3t) - (-t) - 27 = 0 \Leftrightarrow 11t - 22 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó x = 4; y = 7; z = −2.

Vậy H(4; 7; − 2)

Vì M' đối xứng với M qua (α) nên:

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - 2 = 2(4 - 2) \\ y_{M'} - 1 = 2(7 - 1) \\ z_{M'} = 2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 6 \\ y_{M'} = 13 \\ z_{M'} = -4 \end{cases}$$

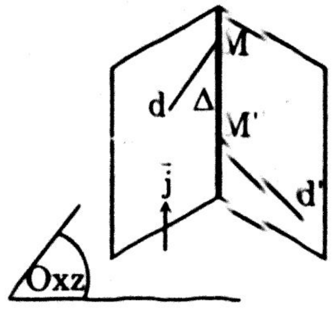
Vậy điểm đối xứng của điểm M qua mặt phẳng (α) là M'(6; 13; −4).

***11.** Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng toạ độ (Oxz) và cắt hai đường thẳng:* $d : \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t; \\ z = 3 - t \end{cases}$ $d' : \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}$

Giải

Δ vuông góc với mặt phẳng tạo độ (Oxyz) nên Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Gọi M(t; −4 + t; 3 − t) và M'(1 − 2t'; −3 + t'; 4 − 5t') lần lượt là giao điểm của Δ với d và d' (h.34). ta có: $\overrightarrow{MM'} = k\vec{j}$.

Suy ra: $\begin{cases} 1 - 2t' - t = 0 & (1) \\ 1 + t' - t = k & (2) \\ 1 - 5t' + t = 0 & (3) \end{cases}$



Từ (1) và (3) suy ra $\begin{cases} t = \dfrac{3}{7} \\ t' = \dfrac{2}{7} \end{cases}$

Thay $t = \dfrac{3}{7}$ vào tọa độ M ta được $M\left(\dfrac{3}{7}; \dfrac{-25}{7}; \dfrac{18}{7}\right)$

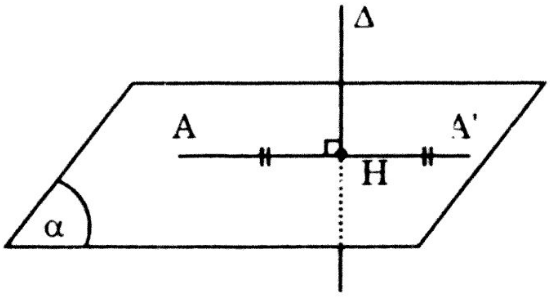
Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = \dfrac{-25}{7} + t \\ z = \dfrac{18}{7} \end{cases}$

12. *Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A(1; −2; −5) qua đường thẳng Δ*

có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$

Giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -1; 2)$



Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Δ thì (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{a} = (2; -1; 2)$ do đó phương trình mp(α) là:

$$2(x - 1) - (y + 2) + 2(z + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - y + 2z + 6 = 0 \qquad (1)$$

Hình chiếu H của A lên Δ là giao điểm của Δ và (α). Thay $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 2t$ vào (1) ta được:

$$2(1 + 2t) - (-1 - t) + 4t + 6 = 0 \Leftrightarrow 9t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Khi đó $x = -1$; $y = 0$; $z = -2$.

Vậy H(−1; 0; −2).

Vì A' là điểm đối xứng của A qua Δ nên:

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 1 = 2.(-1 - 1) \\ y_{A'} + 2 = 2.(0 + 2) \\ z_{A'} + 5 = 2.(-2 + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 2 \\ z_{A'} = 1 \end{cases}.$$

Vậy điểm đối xứng với A qua đường thẳng Δ là A'(−3; 2; 1).

TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

Trong không gian Oxyz cho ba vectơ

$\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ *và* $\vec{c} = (1; 1; 1)$

Sử dụng giả thiết này để trả lời các câu hỏi 1, 2 và 3 sau đây.

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ (B) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ (C) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (D) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Trả lời: Ta có: $\vec{b}.\vec{c} = 1 + 1 + 0 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$. Chọn (D).

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\vec{a}.\vec{c} = 1$ (B) $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương

(C) $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ (D) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

Trả lời: $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$. Chọn (C).

Chú ý: (A), (B) và (D) sai.

3. Cho hình bình hành OADB có $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (O là gốc tọa độ). Tọa độ của tâm hình bình hành OADB là:

(A) (0; 1; 0) (B) (1; 0; 0) (C) (1; 0; 1) (D) (1; 1; 0)

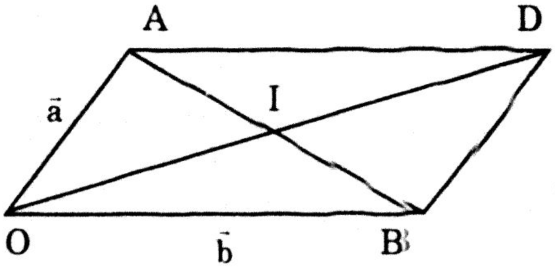
Trả lời: OADB là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

(I là tâm hình bình hành).

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = (0; 1; 0)$



Vậy I(0; 1; 0). Chọn (A).

Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(1; 1; 1).

Sử dụng giả thiết này cho các bài tập 4, 5 và 6 sau đây.

4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện

(B) Tam giác ABD là tam giác đều

(C) AB $\perp$ CD

(D) Tam giác BCD là tam giác vuông.

Trả lời: $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{CD} = (1; 1; 0)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} \neq 0$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} \neq 0$; $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CD} \neq 0$

Tam giác BCD không vuông. Chọn (D).

Chú ý: (A), (B), (C) đúng.

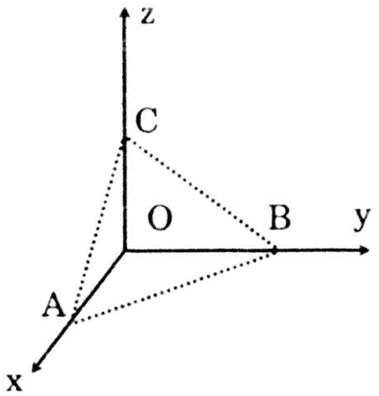
5. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ điểm G là trung điểm của MN là:

(A) $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; (B) $G\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$; (C) $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; (D) $G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Trả lời: Ta có $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ và $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$

Trung điểm MN là $G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Chọn (D).

6. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính là:



(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $\frac{3}{4}$.

Trả lời: Mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D có dạng (S):

$$x^2 + y + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Vì A, B, C, D ∈ (S) nên: $\begin{cases} 1 - 2a + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ 1 - 2c + d = 0 \\ 3 - 2(a + b + c) + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$

Bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Chọn (A).

7. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm M(0; 0; −1) và song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (3; 0; 5)$

Phương trình của mặt phẳng (α) là:

(A) $5x - 2y - 3z - 21 = 0$ (B) $-5x + 2y + 3z + 3 = 0$

(C) $10x - 4y - 6z + 21 = 0$ (D) $5x - 2y - 3z + 21 = 0$.

Trả lời: Vectơ pháp tuyến của mp(α) là $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-10; 4; 6)$

Phương trình mp(α):

$$-10(x - 0) + 4(y - 0) + 6(z + 1) = 0 \Leftrightarrow -5x + 2y + 3z + 3 = 0.$$ Chọn (B).

8. Cho ba điểm A(0; 2; 1), B(3; 0; 1), C(1; 0; 0). Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

(A) $2x - 3y - 4z + 2 = 0$ (B) $2x + 3y - 4z - 2 = 0$

(C) $4x + 6y - 8z + 2 = 0$ (D) $2x - 3y - 4z + 1 = 0$.

Trả lời: $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2; -1)$

Vectơ pháp tuyến của mp(ABC) là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2; 3; -4)$

Phương trình mp(ABC) là:

$2(x - 0) + 3(y - 2) - 4(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 4z - 2 = 0$. Chọn (B).

9. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm M(8; 0; 0), N(0; –2; 0), P(0; 0; 4). Phương trình của (α) là:

(A) $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$ (B) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$

(C) $x - 4y + 2z = 0$ (D) $x - 4y + 2z - 8 = 0$.

Trả lời: Phương trình mp(α) là:

$\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow x - 4y + 2z - 8 = 0$. Chọn (C).

10. Cho ba mặt phẳng (α): $x + y + 2z + 1 = 0$

(β): $x + y - z + 2 = 0$

(γ): $x - y + 5 = 0$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) $(\alpha) \perp (\beta)$ (B) $(\gamma) \perp (\beta)$ (C) $(\alpha) \,//\, (\gamma)$ (D) $(\alpha) \perp (\gamma$.

Trả lời: (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2)$

(γ) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\gamma = (1; -1; 0)$

$\vec{n}_\alpha$ và $\vec{n}_\gamma$ không cùng phương nên (α) không song song với (γ). Chọn (C).

Chú ý: (A), (B), (D) đúng.

11. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm M(2; 0; –1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:

(A) $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Trả lời: Ta có $\vec{a} = 2\vec{a}'$ với $\vec{a}' = (2; -3; 1)$

Phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. Chọn (C).

12 Cho d là đường thẳng đi qua điểm A(1; 2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (α): $4x + 3y - 7z + 1 = 0$.

Phương trình tham số của d là:

(A) $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t \end{cases}$.

Trả lời: Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (4; 3; -7)$, d vuông góc với (α) thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = \vec{n} = (4; 3; -7)$

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}$. Chọn (B).

13 Cho hai đường thẳng: d_1: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $d_1 \perp d_2$ (B) $d_1 // d_2$

(C) $d_1 \equiv d_2$ (D) d_1 và d_2 chéo nhau.

Trả lời: d_1 và d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là

$\vec{a}_1 = (2; 3; 4)$ và $\vec{a}_2 = (4; 6; 8)$

Ta có $\vec{a}_1$ cùng phương $\vec{a}_2$

d_1 qua $M_0(1; 2; 3) \in d_2$ (ứng với $t' = -\frac{1}{2}$)

Vậy $d_1 \equiv d_2$. Chọn (C).

14 Cho mặt phẳng (α): $2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $d \perp (\alpha)$ (B) d cắt (α) (C) $d // (\alpha)$ (D) $d \subset (\alpha)$.

Trả lời: Vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (2; 1; 3)$

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{a} = (1; -2; 0)$

Ta có $\vec{n}.\vec{a} = 2 - 2 = 0$

d đi qua $M_0(-3; 2; 1) \in (\alpha)$ nên $d \subset (\alpha)$. Chọn (D).

15. Cho (S) là mặt cầu tâm I(2; 1; −1) và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - 2y - z + 3 = 0$

Bán kính của (S) là:

(A) 2 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{2}{9}$.

Trả lời: $R = d(I, (\alpha)) = \frac{|2.2 - 2.1 + 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{3} = 2$. Chọn (A).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. *Cho lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F', O và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy, mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của OO' và cắt các cạnh bên của lăng trụ. Chứng minh rằng (P) chia lăng trụ đã cho thành hai đa diện có thể tích bằng nhau.*

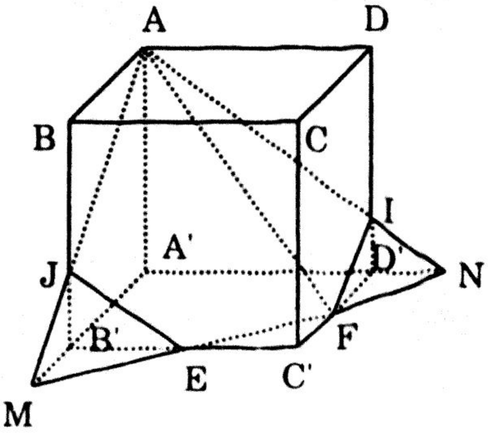
Giải

Gọi I là trung điểm của O và O'.

Giả sử mặt phẳng (P) chia lăng trụ đã cho thành hai đa diện (H) và (H'). khi đó phép đối xứng qua tâm I biến (H) thành (H'), nên hai đa diện ấy bằng nhau và do đó chúng có thể tích bằng nhau.

2. *Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a. Gọi E và F lần lượt là trung điểm B'C' và C'D'. Mặt phẳng (AEF) chia khối lập phương đó thành hai khối đa diện (H) và (H') trong đó (H) là khối đa diện chứa đỉnh A'. Tính thể tích của (H).*

Giải



Đường thẳng EF cắt A'B' và A'D' lần lượt tại M và N.

Gọi I là giao điểm của AN và DD', J là giao điểm của AM và BB'.

Mặt phẳng (AEF) cắt hình lập phương theo thiết diện là ngũ giác AIFEJ.

Ta có $MB' = ND' = \frac{a}{2}$

Do đó $\frac{ID'}{ID} = \frac{D'N}{DA} = \frac{1}{2} \Rightarrow ID' = \frac{a}{3}$. Tương tự: $JB' = \frac{a}{3}$

Ta có: $V_{J.B'ME} = V_{I.D'NF} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{a^2}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3}{72}$; $V_{A.A'MN} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{9a^2}{4}.a = \frac{3a^3}{8}$

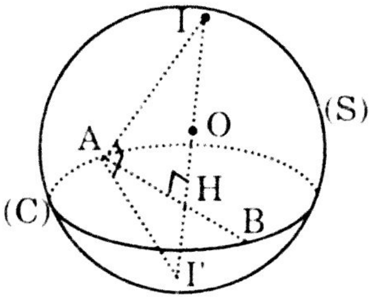
Từ đó suy ra: $V_H = V_{A.A'MN} = -V_{J.B'ME} - V_{I.D'NF} = \frac{3a^3}{8} - 2.\frac{a^3}{72} = \frac{25}{72}a^3$.

3. *Cho mặt cầu (S) tâm O bán kính r. Hình nón có đường tròn đáy (C) và đỉnh I đều thuộc (S) được gọi là hình nón nội tiếp mặt cầu (S). Gọi h là chiều cao của hình nón đó.*

a) Tính thể tích của hình nón theo r và h.

b) Xác định h để thể tích của hình nón là lớn nhất.

Giải



a) Gọi A là điểm thuộc đường tròn đáy (C), H là tâm đường tròn (C), II' là đường kính mặt cầu (S). Tam giác AII' vuông tại A có đường cao AH nên:

$$AH^2 = HI.HI' = h(2r - h)$$

Thể tích hình nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2.h = \frac{1}{3}\pi(2r - h)h^2$$

b) Áp dụng bất đẳng thức $abc \le \left[\frac{1}{3}(a + b + c)\right]^3$ với a, b, c > 0 ta có:

$$V = \frac{\pi}{6}(4r - 2h)h.h \le \frac{\pi}{6}.\left(\frac{4r - 2h + h + h}{3}\right)^3 = \frac{32\pi r^3}{81}$$

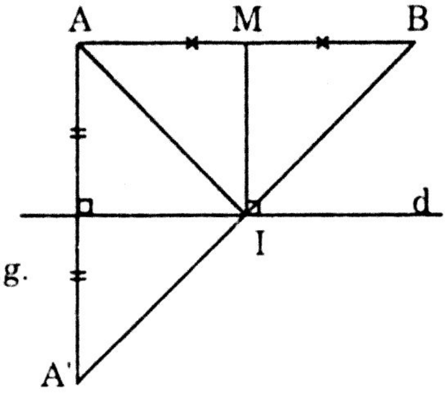
Vậy V đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi r^3}{81}$ khi 4r − 2h = h, hay $h = \frac{4r}{3}$.

4. *Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(1; 2; −1); B(7; −2; 3) và đường thẳng d có phương trình:* $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d và AB cùng nằm trong một mặt phẳng.

b) Tìm điểm I trên d sao cho AI + BI nhỏ nhất.

Giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6; -4; 4)$

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{a}_d = (3; -2; 2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}_d$ và A ∉ d nên AB // d.

Vậy AB và d cùng nằm trong một mặt phẳng.

b) Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d, ta có $AI + BI = A'I + BI \geq A'B$

$A'I + BI$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ A', I, B thẳng hàng.

Vậy điểm I cần tìm là giao điểm của A'B và d. Gọi M là trung điểm của AB, ta có M(4; 0; 1) và $\overrightarrow{MI} \perp \vec{a}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\vec{a}_d = 0$

Giả sử $I(-1 + 3t, 2 - 2t, 2 + 2t)$

$$\overrightarrow{MI} = (-5 + 3t, 2 - 2t, 1 + 2t)$$

$$\overrightarrow{MI}.\vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow 3(-5 + 3t) - 2(2 - 2t) + 2(1 + 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 17t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy I(2; 0; 4).

5. *Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết rằng AC = AD = 4 cm, AB = 3 cm, BC = 5 cm.*

a) Tính thể tích tứ diện ABCD.

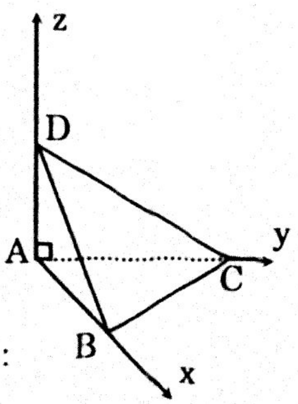
b) Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

Giải

a) Ta có $AC^2 + AB^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = BC^2 \Rightarrow AB \perp AC$

Thể tích tứ diện ABCD

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}AB.AC.AD = 8\ (cm^3).$$



b) Chọn hệ trục sao cho các điểm A, B, C, D có tọa độ như sau:

A(0; 0; 0), B(3; 0; 0), C(0; 4; 0), D(0; 0; 4)

Mặt phẳng (BCD) có phương trình theo đoạn chắn là:

Ta có: $$d(A, (BCD)) = \frac{|-12|}{\sqrt{16 + 9 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{34}}$$

6. *Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ (a > 0).*

a) Tính diện tích của mặt cầu (S) và thể tích của khối cầu tương ứng

b) Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) theo một đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C)

c) Tính diện tích xung quanh của hình trụ nhận (C) làm đáy và có chiều cao là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

Giải

a) Mặt cầu (S) có bán kính r = 2a

Diện tích mặt cầu (S): $S = 4\pi r^2 = 16\pi a^2$

Thể tích của khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$

b) Phương trình mặt phẳng Oxy là $z = 0$

$$M(x, y, z) \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy (C) có tâm $O(0; 0; 0)$ bán kính là $r' = r = 2a$.

c) Diện tích xung quanh khối trụ: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.2a.a\sqrt{3} = 4\pi a^2\sqrt{3}$

Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2 l = 4\pi a^2.a\sqrt{3} = 4\pi a^3\sqrt{3}$

7 *Trong không gian cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình*

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} ; \qquad d_2: \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = t' \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau

b) Viết phương trình của mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2

Giải

a) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(1; 0; 0)$ vectơ chỉ phương là $\vec{a}_1 = (-1; 1; -1)$

Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(0; -1; 0)$ vectơ chỉ phương là $\vec{a}_2 = (2; 1; 1)$

Ta có $\quad \vec{n} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = (2; -1; -3)$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; -1; 0)$$

Suy ra $\quad \overrightarrow{M_1M_2}.\vec{n} = -2 + 1 = -1 \neq 0$

Vậy d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Vectơ pháp tuyến mp(α) là: $\vec{n} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = (2; -1; -3)$

Phương trình mp(α) là: $2(x - 1) - y - 3z = 0$ hay $2x - y - 3z - 2 = 0$

8 *Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1; 0; -1)$, $B(3; 4; -2)$, $C(4; -1; 1)$, $D(3; 0; 3)$*

a) Chứng minh rằng A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC).

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d) Tính thể tích tứ diện ABCD.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 0; 4)$

Ta có $\quad \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7; -7; -14)$

$$\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AD} = 2.7 + 4.(-14) = -42 \neq 0$$

Vậy A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Mp (ABC) đi qua A có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = (1; -1; -2)$ nên (ABC) có phương trình là

$$1(x-1) - 1(y-0) - 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 2z - 3 = 0$$

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (ABC) là:

$$d(D, (ABC)) = \frac{|3-6-3|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -1)$; $\overrightarrow{AD} = (2; 0; 4) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow AB \perp AD$ (1)

$\overrightarrow{CD} = (-1; 1; 2)$, $\overrightarrow{CB} = (-1; 5; -3) \Rightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow CB \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A và C thuộc mặt cầu đường kính BD. Tâm I mặt cầu là trung điểm BD nên $I(3; 2; \frac{1}{2})$ và bán kính $R = IB = \frac{\sqrt{41}}{2}$

Vậy phương trình mặt cầu là:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z - \frac{1}{2}) = \frac{41}{4}$$

d) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 4; -1)$

$\overrightarrow{AC} = (3; -1; 2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow AB \perp AC$

Thể tích tứ diện ABCD là:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC}.d(D,(ABC)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\sqrt{21}.\sqrt{14}.\sqrt{6} = 7.$$

9. *Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(2; 4; –1), B(1; 4; –1), C(2; 4; 3), D(2; 2; –1).*

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một. Tính thể tích tứ diện ABCD.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D.

c) Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và song song với mặt phẳng (ABD).

Giải

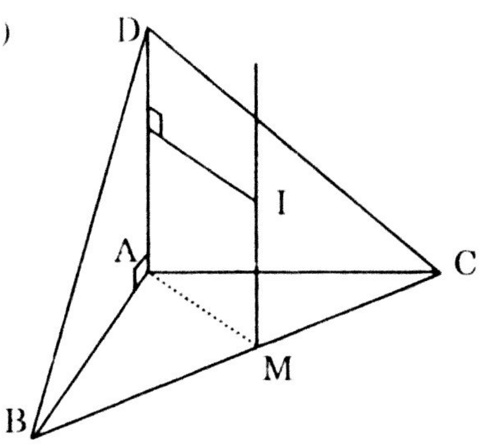
a) $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 0; 4)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -2; 0)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 0$

Suy ra AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một

Thể tích tứ diện ABCD là:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.AC.AD = \frac{4}{3}$$



b) Gọi M là trung điểm BC ta có $M(\frac{3}{2}; 4; 1)$

Gọi I thỏa $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}.0 = \frac{3}{2} \\ y_I = 4 + \frac{1}{2}.(-2) = 3 \\ z_I = 1 + \frac{1}{2}.0 = 1 \end{cases}$$

Vậy tâm mặt cầu (S) là $I(\frac{3}{2}; 3; 1)$ bán kính $R = IA = \frac{\sqrt{21}}{2}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = \frac{21}{4}$$

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 0)$ và $\overrightarrow{AD} = (0; -2; 0)$

Suy ra (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = (0; 0; 2)$, ta chọn $\vec{n}\,' = (0; 0; 1)$. Phương trình mặt phẳng (α) có dạng (α) có dạng $z + D = 0$.

(α) tiếp xúc với mặt cầu (S) $\Rightarrow d(I, (\alpha)) = r$.

$$\Leftrightarrow |1 + D| = \frac{\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = -1 + \frac{\sqrt{21}}{2} \\ D = -1 - \frac{\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

vậy có hai mặt phẳng (α) thỏa mãn đề bài:

$$(\alpha_1): z - 1 + \frac{\sqrt{21}}{2} = 0 \text{ và } (\alpha_2): z - 1 - \frac{\sqrt{21}}{2} = 0.$$

11. *Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (d):* $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ *và mặt phẳng*

(α): $2x + y + z = 0$

a) Tìm tọa độ giao điểm A của (d) và (α).

b) Viết phương trình mặt phẳng (β) qua A và vuông góc với (d).

Giải

a) Tọa độ giao điểm A của d và (α) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 - 2t & (1) \\ y = 2 + t & (2) \\ z = 3 - t & (3) \\ 2x + y + z = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được:

$$2(1 - 2t) + 2 + t + 3 - t = 0 \Leftrightarrow -4t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{4}$$

Khi đó $x = -\frac{10}{4}$; $y = \frac{15}{4}$; $z = \frac{5}{4}$

Vậy $A(-\frac{10}{4}; \frac{15}{4}; \frac{5}{4})$

b) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là: $\vec{a}_d = (-2; 1; -1)$.

Mp(β) qua A vuông góc với đường thẳng d thì (β) có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = \vec{a}_d = (-2; 1; -1).$$

Vậy mặt phẳng (β) có phương trình:

$$-2\left(x + \frac{10}{4}\right) + 1\left(y - \frac{15}{4}\right) - 1\left(z - \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + y - z - \frac{30}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y + 2z + 15 = 0$$

11. *Trong không gian Oxyz cho các điểm A(–1; 2; 0), B(–3; 0; 2), C(1; 2; 3), D(0; 3; –2)*

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và phương trình tham số của đường thẳng AD.

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AD và song song với BC.

Giải

a) Mặt phẳng (ABC) có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; 0; 3)$.

$$\Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-6; 10; 4)$$

Suy ra mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-6; 10; 4)$, ta có thể chọn $\vec{n}' = (3; -5; -2)$

Vậy phương trình của (ABC) là:

$$3(x + 1) - 5(y - 2) - 2z = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - 2z + 13 = 0$$

Đường thẳng AD đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AD} = (1; 1; -2)$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng AD là: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}$

b) Mặt phẳng (α) chứa AD và song song với BC với $\overrightarrow{AD}$ (1; 1; −2) và $\overrightarrow{BC} = (4; 2; 1)$. Suy ra vectơ pháp tuyến của (α) là

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right] = (5; -9; -2)$$

Phương trình mp(α) là:

$$5(x + 1) - 9(y - 2) - 2z = 0 \Leftrightarrow 5x - 9y - 2z + 23$$

12. *Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(3; −2; −2), B(3; 2; 0), C(0; 2; 1) và D(−1; 1; 2)*

a) Viết phương trình mặt phẳng (BCD). Suy ra ABCD là một tứ diện.

b) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

c) Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và mặt phẳng (BCD).

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (-3; 0; 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-4; -1; 2)$

vectơ pháp tuyến của (BCD) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = (1; 2; 3)$

Phương trình mặt phẳng (BCD) là:

$$1(x - 3) + 2(y - 2) + 3z = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 7 = 0$$

Thay tọa độ điểm A vào phương trình của (BCD) ta được

$$1(3) + 2(-2) + 3(-2) - 7 = -14 \neq 0, \text{ suy ra } A \notin (BCD)$$

Vậy ABCD là một tứ diện.

b) Mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với (BCD) có bán kính

$$R = d(A, (BCD)) = \frac{|-14|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{14}$$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 14$$

c) Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD). Phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

Thay $x = 3 + t$, $y = -2 + 2t$, $z = -2 + 3t$ vào phương trình mp(BCD) ta được:

$$3 + t + 2(-2 + 2t) + 3(-2 + 3t) - 7 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Khi đó $x = 4$; $y = 0$; $z = 1$

Vậy H(4; 0; 1) là tiếp điểm của (S) với mp(BCD).

***13.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng:*

$$d_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + t' \\ z = -3 + 2t' \end{cases}$$

a) Chứng minh d_1 và d_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Viết phương trình mặt phẳng đó.

Giải

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -1 + 3t = t' \\ 1 + 2t = 1 + t' \\ 3 - 2t = -3 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \end{cases}$

Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại M(2; 3; 1) $\Rightarrow$ d_1 và d_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) d_1 và d_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_1 = (3; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; 2)$

$$\vec{n} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = (6; -8; 1)$$

Mặt phẳng (α) di qua M(2; 3; 1) và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (6; -8; 1)$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) chứa d_1 và d_2 là:

$$6(x - 2) - 8(y - 3) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8y + z + 11 = 0$$

***14.** Trong không gian cho ba điểm A, B, C.*

a) Xác định điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = k^2$, với k là hằng số.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{CB}$$

Vậy G là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{CB}$

b) Ta có: $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = k^2$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{MG})^2 + 2(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 - 2(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow GA^2 + 2GB^2 - 2GC^2 + GM^2 - 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = k^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = k^2 - (GA^2 + 2GB^2 - 2GC^2)$$

Từ đó suy ra

- Nếu $k^2 - (GA^2 + 2GB^2 - 2GC^2) < 0$ thì M không tồn tại.
- Nếu $k^2 - (GA^2 + 2GB^2 - 2GC^2) = 0$ thì $M \equiv G$.
- Nếu $k^2 - (GA^2 + 2GB^2 - 2GC^2) > 0$ thì tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G, bán kính bằng $\sqrt{k^2 - (GA^2 + 2GB^2 - 2GC^2)}$.

15 *Cho hai đường thẳng chéo nhau:* $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ *và* $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$

a) Viết phương trình các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau và lần lượt chứa d và d'.

b) Lấy hai điểm M(2; −1; 1) và M'(2; 0; 1) lần lượt trên d và d'. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (β) và khoảng cách từ điểm M' đến mặt phẳng (α). So sánh hai khoảng cách đó.

Giải

a) Hai mặt phẳng (α) và (β) cùng song song hoặc chứa giá của hai vectơ $\vec{a} = (-1; 1; -1)$ và $\vec{b} = (2; 1; 1)$. Suy ra (α) và (β) có cùng vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (2; -1; -3)$$

Lấy điểm A(2; −1; 1) trên d và điểm A'(2; 0; 1) trên d'.

Ta có phương trình của (α) là:

$$2(x - 2) - 1(y + 1) - 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3z - 2 = 0$$

Tương tự phương trình của (β) là:

$$2(x - 2) - 1(y - 0) - 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 3z - 1 = 0$$

b) $d(M, (\beta)) = \dfrac{|2(2) - (-1) - 3(1) - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

$d(M', (\alpha)) = \dfrac{|2(2) - 0 - 3(1) - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 9}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

Vậy $d(M', (\beta)) = d(M, (\alpha))$

16. *Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (α) có phương trình 4x + y + 2z + 1 = 0 và mặt phẳng (β) có phương trình 2x − 2y + z + 3 = 0.*

a) Chứng minh rằng (α) cắt (β).

b) Viết phương trình tham số của đường thẳng d là giao của (α) và (β).

c) Tìm điểm M' là ảnh của M(4; 2; 1) qua phép đối xứng qua mặt phẳng (α).

d) Tìm điểm N' là ảnh của N(0; 2; 4) qua phép đối xứng qua đường thẳng d.

Giải

a) Mp(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (4; 1; 2)$

Mp(β) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\beta = (2; -2; 1)$

$\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$ không cùng phương nên (α) cắt (β).

b) Gọi $d = \alpha \cap \beta$

Vectơ chỉ phương của d vuông góc với $\vec{n}_\alpha$ và $\vec{n}_\beta$

Nên $\vec{a}_d = \left[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta\right] = (5; 0; -10) = 5(1; 0; -2)$

Tìm điểm M trên d. cho x = 0 ta tìm y, z từ hệ:

$$\begin{cases} y + 2z + 1 = 0 \\ -2y + z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy $M(0; 1; -1) \in d$

Phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

c) Phương trình của đường thẳng Δ qua M và vuông góc với (α) là $\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Để tìm giao điểm M_0 của Δ với (α) ta giải phương trình

$$4(4 + 4t) + 2 + t + 2(1 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 21t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Suy ra x = 0; y = 1; z = −1. Vậy $M_0(0; 1; -1)$

Vì M' là điểm đối xứng của M qua (α) nên: $\overline{MM'} = 2\overline{MM_0}$

suy ra M'(−4; 0; −3)

d) Mặt phẳng (γ) qua N và vuông góc với d có phương trình:

$$x - 2(z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 8 = 0.$$

Để tìm giao điểm N_0 của d và (γ) ta giải phương trình:

$$t - 2(-1 - 2t) + 8 = 0 \Leftrightarrow 5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Khi đó x = −2; y = 1; x = 3.

Vậy N_0 (−2; 1; 3) Vì N' là điểm đối xứng của N qua d nên $\overline{NN'} = 2\overline{NN_0}$

Suy ra N'(−4; 0; 2).

MỤC LỤC

Chương I. **KHỐI ĐA DIỆN**

§1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN 5
§2. KHỐI ĐA DIỆN LỒI VÀ KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU 7
§3. KHÁI NIỆM THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN 10
ÔN TẬP CHƯƠNG I 14
TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I 20

Chương II. **MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU**

§1. KHÁI NIỆM MẶT TRÒN XOAY 23
§2. MẶT CẦU 31
ÔN TẬP CHƯƠNG II 37
TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II 40

Chương III. **PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

§1. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 45
§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 50
§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN 56
ÔN TẬP CHƯƠNG III 65
TRẢ LỜI CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III 71
ÔN TẬP CUỐI NĂM 76

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại : (04) 3971 4896 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :
***Giám đốc* : PHÙNG QUỐC BẢO**
***Tổng biên tập* : PHẠM THỊ TRÂM**
Biên tập : Trần Ngọc Lâm - Đặng Thị Bình
Trình bày : Diệu Tâm
Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng
Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

Mã số : 1L-163ĐH2010
In 5.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Song Nguyên.
Số xuất bản: 290-2010/CXB/18-50/ĐHQGHN ngày 01/4/2010.
Quyết định xuất bản số : 163LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.